

Einführung in prädikatives und funktionales Denken

Inge Schwank, Osnabrück (Germany)

Abstract: *Introduction to functional and predicative thinking.* A particular interest for invariances on the one hand and variability on the other hand as seen in stationary and moving objects respectively has often led people to more or less severe disagreements. The notions of »*predicative thinking*« versus »*functional thinking*« describe a cognitive pattern that tries to explain the preference or even special capability for either one of the two view points. Meanwhile, there are not only numerous qualitative experimental results that prove the usefulness of this theoretical construct, but also an EEG-study and several studies involving eye-movement analysis that emphasise quantitative evidence. As aspects of predicative thinking have been studied quite frequently in cognitive psychology, there is an accumulated need for studies of functional thinking. Primary school education shows that functional approaches have been neglected in spite of advocates of the operational principle. Anyhow, there are didactical materials like the Addition-, Multiplication-Landscape, the spiral staircase for calculating or the Dynamic Labyrinth that are very well suited to demand and promote functional thinking.

Kurzreferat: Ein besonderes Interesse für Invariantes auf der einen Seite bzw. Werdendes auf der anderen Seite hat Menschen immer wieder zu härteren oder milderer Konfrontationen geführt. Mit dem Begriffspaar »*Prädikatives Denken – Funktionales Denken*« ist ein Versuch unternommen worden, kognitive Erklärungsmuster für eine Vorliebe oder auch besondere Fähigkeit für je eine der beiden Sichtweisen zu geben. Mittlerweile liegen nicht nur zahlreiche qualitative Ergebnisse aus Untersuchungen vor, die die Nützlichkeit der theoretischen Konstruktion nachweisen, mit einer EEG-Untersuchung sowie mehreren Untersuchungen zu Augenbewegungen können auch vermehrt quantitative Daten vorgewiesen werden. Während Aspekte prädikativen Denkens in der Kognitionspsychologie durchaus häufiger untersucht worden sind, stellt sich im Falle funktionalen Denkens ein Nachholbedarf heraus. Im Primarstufenunterricht zeigt sich, dass funktionales Vorgehen – trotz der Fürsprecher des Operativen Prinzips – tendenziell vernachlässigt wird. Gleichwohl existieren didaktische Materialien wie beispielsweise die Plus-, Mallandschaft, die Rechenwendeltreppe oder die Dynamischen Labyrinth, die in besonderer Weise geeignet sind, funktionales Denken zu fordern und fördern.

1. Kognitive Mathematik

In seinem Werk »*The Psychology of Invention in the Mathematical Field*« leitet Hadamard in sein Thema mit der Feststellung ein, dass unser Fortschritt in einer steigenden Anzahl von Fällen dadurch behindert sei, dass zwei Disziplinen involviert seien, nämlich die Psychologie und die Mathematik und zu einer angemessenen Behandlung also jemand sowohl Psychologe als auch Mathematiker sein müsse (Hadamard 1945, p.1). Begreift man wie Wittenberg (1968) *Mathematik als Experiment des reinen Denkens*, so wird man innerhalb der Psychologie insbesondere an die Einbringung von Erkenntnissen aus der Kognitionspsychologie sowie den sich verselbständigenden Gebieten der Cognitive Science und der Hirnforschung, also den Neurowissenschaften denken. »Kognitive Mathematik«

steht für einen Forschungszweig, der einen solchen Zusammenschluss zwischen kognitionsorientierter Psychologie und Mathematik sucht. Erwartet wird nicht nur ein (langsamer und hindernisreicher) Fortschritt im Verstehen des mathematischen Denkens, sondern damit verbunden auch eine bessere Einsicht in das Erlernen von Mathematik und in Folge Auswirkungen auf die Gestaltung von Mathematikunterricht.

2. Gleich/Ungleich – Invariantes/Werdendes

Grundsätzlich für das Denken ist, dass "bloße Einmaligkeit" nicht interessiert, mittels kognitiver Mechanismen "soll sie ja gerade in eine Beziehung gebracht werden" (Gorgé 1960, S.85). Aus der Einmaligkeit kann z.B. ein »Fall der Art ...« werden oder ein neues »Wiedererkennungsmittel« für andere Fälle. Dieses kann aufgrund zweier unterschiedlicher basaler Fähigkeiten menschlicher Kognition geschehen. Wir kennen einmal [a] die Empfänglichkeit eines Gehirns für Gleichheiten (etwas anspruchsvoller: für Ähnlichkeiten/Verwandtschaften), die in Gedanken genutzt werden können, um Elemente in einen systematischen, strukturellen Zusammenhang zu bringen, die Gleichartigkeit fungiert dabei als Ordnungskriterium; zum anderen [b] die Empfänglichkeit eines Gehirns für Unterschiedlichkeiten, die in Gedanken genutzt werden können, um Elemente durch einen diese Unterschiedlichkeiten bewirkenden Konstruktionsprozess (etwas anspruchsvoller: durch Verkettungen von mehreren unterschiedlichen Konstruktionsprozessen) auf die Reihe zu bringen, die Unterschiedlichkeit fungiert dabei als Herstellungskriterium. Um diese beiden verschiedenartigen kognitiven Herangehensweise zu unterscheiden, führen wir die Begriffe »*prädikatives Denken*« respektive »*funktionales Denken*« ein. Hierbei erinnert »prädikativ« daran, dass bei [a] das wiederholte Zutreffen von Prädikaten überprüft wird, und »funktional« daran, dass bei [b] das wiederholte Funktionieren der Konstruktionsschritte getestet wird. Sowohl systematische Gleichheit als auch systematische Unterschiedlichkeit können aus der Isolation der Einmaligkeit führen.

Betrachten wir ein Anwendungsbeispiel zur Untersuchung des logischen Denkens. Die gegebene Abbildung (Abb.1) soll so ergänzt werden, dass sich eine schlüssige 3x3-Matrix ergibt. Dazu ist eine Figur auszudenken, die die offene Stelle unten rechts in geeigneter Weise ausfüllt. Die gegebenen Elemente sind darauf hin zu analysieren, in welcher Beziehung sie zueinander stehen, die auszudenkende Lösungsfigur muss von einer Art sein, dass sie sich nahtlos in dieses Beziehungsgeflecht einreicht und es dadurch vervollständigt bzw. fortführt.

Prädikative Analyse: Es fällt auf, dass in den Zeilen die Deckel und Böden der Figuren jeweils die gleiche Form haben, in den Spalten haben die Seitenwände der Figuren jeweils die gleiche Form. Daraus kann geschlossen werden, dass die fehlende Figur in der dritten Zeile / dritten Spalte den gleichen Deckel und Boden hat wie die anderen Figuren in der dritten Zeile und die gleichen Seitenwände wie die anderen Figuren in der dritten Spalte.

Funktionale Analyse: Es fällt auf, dass sich in den Zeilen die Seitenwände unterscheiden, in den Spalten die Deckel und Böden. Diese Unterschiedlichkeiten können wie folgt produziert werden: In den Zeilen werden die Seitenwände

zunächst nach innen, dann nach außen gezogen; in den Spalten geschieht dieses jeweils mit Deckel und Boden. Daraus ergibt sich an der offenen Stelle eine Figur, bei der alle vier seitlichen Begrenzungen nach außen gezogen worden sind.

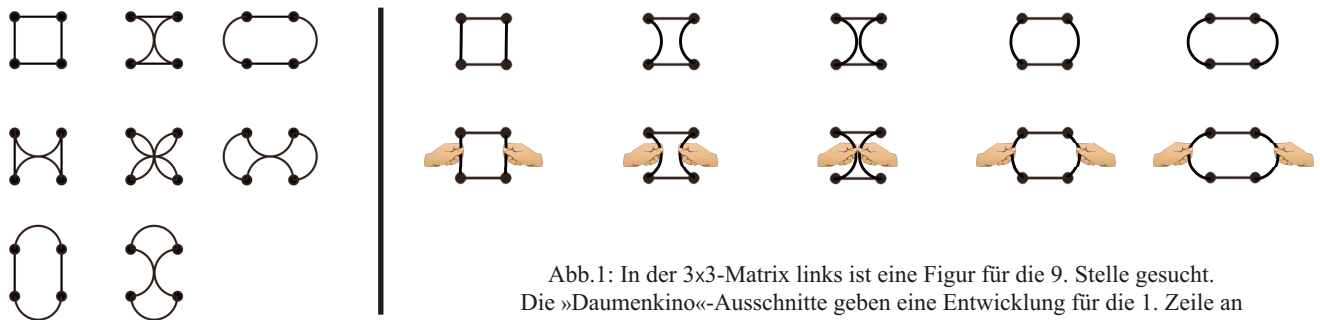


Abb. 1: In der 3x3-Matrix links ist eine Figur für die 9. Stelle gesucht. Die »Daumenkino«-Ausschnitte geben eine Entwicklung für die 1. Zeile an und zwar (oben) ohne wie auch (unten) mit Hand anlegen.

Dieses Aufgabenformat ist in Intelligenztests weit verbreitet. Allerdings werden in der Regel – zur Erleichterung der angestrebten statistischen Auswertung – mehrere Figuren als Lösung vorschlagen, zwischen denen man sich entscheiden muss – und auch dann noch kann, wenn einem selbst keine geeignete neunte Figur (mit expliziter Begründung) einfällt. Unser Interesse gilt der Analyse der kognitiven Prozesse, die zur Konstruktion einer Lösungsfigur als Folge erkannter Regelmäßigkeiten führen, die Angabe von eventuell passenden Lösungsfiguren würde sich dabei nur störend auswirken. Auch wenn es noch nicht gelungen ist, das Phänomen »Intelligenz« abschliessend zu klären – hier geht es schwerpunktmäßig um die sogenannte fluide Intelligenz – so liegt doch auf der Hand, dass es sich bei der Fähigkeit zu solchen grundlegenden, logisch zwingenden Analysen um eine wichtige Voraussetzung für das mathematische Denken handelt.

Anmerkung:

Neben der beschriebenen Art prädikativer Argumentation, bei der die Figuren seziiert und interfigurell gleiche Bestandteile herausgelöst werden, gibt es noch eine weitere typische, die sich der Mengenbildung bedient. In dem hier gegebenen Beispiel führt dies allerdings zu einer weniger schlüssigen Argumentation, die nicht generell auf alle Figuren anwendbar ist und eine Ausnahmebedingung für einen Sonderfall erfordert: In der Matrix fällt auf, dass fast alle Figuren paarweise auftauchen, angeordnet um die mittlere Figur, folglich ergibt sich an der offenen Stelle eine Wiederholung der ersten Figur aus der ersten Zeile, also wieder ein »Quadrat«. Die mittlere Figur bekümmert hier tatsächlich wenig, da sie (auch noch nahegelegt durch ihre Punktsymmetrie) als Mittelpunkt der Ordnung angesehen werden kann und insoweit auch nur einmal vorzukommen braucht.

Solche Matrix-Aufgaben kann man so gestalten, dass sie prädikativ oder funktional schwerer zugänglich sind (Schwank 1998/2000). Die funktional schwierigeren Matrix-Aufgaben, für die es keine ebenbürtigen prädikativen Analysen gibt, sind in der Testliteratur wenig verbreitet. Der bekannte APM-Test (Raven 1965) enthält eine einzige dieser funktionalen Aufgaben, was dazu führt, dass sie bei Analysen als nicht weiter interessantes Randphänomen leicht ausgelassen wird. Carpenter et al. (1990) entwickelten beispielsweise eine Klassifikation zur Erfassung der kognitiven Vorgehensweisen beim Lösen der Ravenaufgaben, konnten dabei aber die funktionale Aufgabe nicht eingliedern: "Problem was not classifiable by our taxonomy."

(p.431) und ließen es dabei bewenden.

Generell sind funktionale Vorstellungen in der Psychologie, insbesondere auch den Neurowissenschaften bislang deutlich weniger gut untersucht als prädikative.

Stellvertretend sei hierzu aus dem Journal of Cognitive Neuroscience (2002) zitiert:

"While much work in cognitive neuroscience has investigated how brain represents different categories of entities, less attention has been given to the more basic distinction between entities and events." (Kable et al. p.795)

Diese Verschiebung in der Schwerpunktsetzung beginnt schon damit, dass man recht viel über den kognitiven Umgang mit Substantiven und ihren ganzen Vernetzungen aufgrund ihrer kategorialen Beziehung untereinander weiß (z.B. Hund – Säugetier), dafür aber recht wenig über den kognitiven Umgang mit Verben (s. aber z.B. Preißl et al. 1995; Pulvermüller et al. 2000; weiter: Damasio et al. 2001; Kable et al. 2002; Tyler et al. 2003).

2.1 Zur Besonderheit funktionaler Vorstellungen

Der Umgang mit funktionalen Vorstellungen scheint sich dem einfachen experimentellen Zugriff zu widersetzen, die externe Repräsentation des vorstellungsmäßig Werdenden ist zu überdenken. Betrachten wir noch einmal das Aufgabenbeispiel. Nehmen wir eine Person an, die einer anderen ihre prädikative Analyse erklären möchte. Dazu kann sie mit dem Finger die Zeilen und Spalten durchgehen und jeweils auf die gleichbleibenden Elemente zeigen, sie könnte auch farbige Stifte nehmen und dadurch pro Zeile und Spalte die Invarianten hervor heben und so ins Auge ihres Gegenübers springen lassen. Dadurch, dass sie mit dem Finger in der Zeichnung auf das Gemeinte zeigt, kann sie die Blicke ihres Gesprächspartners und damit seine Aufmerksamkeitsfokussierung lenken, so z.B. spaltenweise: "Schau hier, hier und hier; du siehst, die Seitenwände sind immer gleich". Der Fall liegt anders bei einer funktionalen Erklärung. Worauf soll die erklärende Person zeigen, wenn sie den Prozess anspricht, der die eine Figur in die nächste überführt? Auf dem Blatt gibt es keine Bewegung, es ereignet sich nichts: das Passieren ist ein mentales Konstrukt. Versuche, dieses sichtbar zu machen, etwa mit einem Daumenkino oder einer kleinen Animation auf dem Computermonitor, führen auf ein nächstes Problem. Die bloße Darstellung des Ablaufs (vgl. Abb.1) bleibt unbefriedigend; es ist nicht die passive Beobachtung des Werdens, die den Kern des funktionalen Zurechtlegens trifft, sondern die aktive Verursachung und Inganghaltung der Handlung, die benötigt wird. Es geht weniger ums bloße Schauen als viel-

mehr ums Hand anlegen und damit um ein Einlassen auf das tatsächliche Tun: die *Handlungen* brauchen einen sie verursachenden/ausführenden Täter (vgl. Abb.1). In den Zwischenresultaten wie auch dem Endresultat ist die Erzeugungshandlung gleichsam erloschen.

Hier wird deutlich, dass die funktionalen Vorstellungen in ihrer Betonung einer Entstehungsgeschichte ein besonderes Verhältnis zur Zeit haben. Sie sind nicht durch ein Abbild, ein Foto zu fassen. Bateson (1995⁴, S. 136; s. auch Schwank et al. 2003) arbeitet dieses Charakteristikum am Beispiel des Begriffs »Schalter« heraus, den er mit Begriffen wie »Tisch« oder »Stein« kontrastiert:

"... der Schalter existiert *nur* in den Augenblicken, wo seine Einstellung verändert wird, und daher hat der Begriff »Schalter« ein besonderes Verhältnis zur *Zeit*. Er ist eher der Vorstellung »Veränderung« als der Vorstellung »Objekt« verwandt."

James (1907, p.77) beleuchtet die Problematik in seinen Abhandlungen zum pragmatischen Wahrheitsbegriff ebenfalls sehr aufschlussreich mit physikalischen Konzepten:

"The popular notion is that a true idea must copy its reality. ... Shut your eyes and think of yonder clock on the wall, and you get just such a true picture or copy of its dial. But your idea of its 'works' ... is much less of a copy, yet it passes muster, for it in no way clashes with the reality. Even tho it should shrink to the mere word 'works', that word still serves you truly; and when you speak of the 'time-keeping function' of the clock, or of its spring's 'elasticity', it is hard to see exactly what your ideas can copy. You perceive that there is a problem here."

Das Problem, dass zwar in Konstruktionshandlungen gedacht werden kann, die externe Repräsentation und Verfügbarkeit solcher mentaler Vorstellungen für andere sich aber als schwierig herausstellt, ist seit alters her bekannt. In Abschnitt 3 werden wir uns damit beschäftigen, wie im Primarstufenunterricht bei der Erarbeitung des Zahlverständnisses und der Rechenoperationen damit umgegangen werden kann.

2.2 Zur Besonderheit prädikativer Vorstellungen

Betrachten wir eine weitere Matrix-Aufgabe (Abb.2), die z.B. wie folgt prädikativ analysiert werden kann:

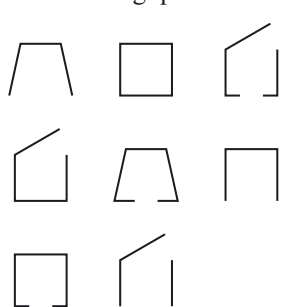


Abb.2: Die 3x3-Matrix ist zu komplettieren.

Es existieren drei Figurtypen: »Quadrat«, »Haus«, »Trapez«. Die quadratartigen und hausartigen Figuren kommen je dreimal vor und zwar jeweils mit den drei Bodenarten: offen/halboffen/geschlossen, die trapezartigen Figuren kommen nur zweimal vor und zwar mit den beiden Bodenarten offen/halboffen. Ein weiteres trapezartiges Objekt mit geschlossenem Boden als Lösungsfigur vervollkommnet die Regelmäßigkeit. [Hier führt die Mengenbildung weiter als im o.g. Fall, bei dem mit Zweiermengen gearbeitet worden war.]

Typisch und hilfreich bei prädikativen Analysen ist die Verwendung von Wörtern. In der gegebenen Analyse werden »Quadrate«, »Häuser«, und »Trapeze« ausgemacht. [Genauso könnte man beim ersten Aufgabenbeispiel von »Quadraten«, »Sportarenen« und »Diabolos« sprechen. Die Phantasie kann hier groß sein, so lassen sich in den »Trapezen« auch »umge-

kippte Blumentöpfe« sehen etc.] Es kommt nicht darauf an, dass eine identifizierte Figur ein »Haus« *ist*, oder ob eine Person auf das Wort hin eine solche Figur zeichnen würde, es kommt darauf an, dass man sich der Wörter bedienen kann, um Ordnung und damit Systematik zwischen den Figuren herzustellen. Bildlich gesprochen lässt sich das gewählte Wort als Faden (speziellen Querschnitts) benutzen, mit dem Figuren gleicher Art aufgefädelt werden können, oder anders ausgedrückt als Mengenklammern, in die Figuren gleicher Art eingesammelt werden können. Ausgenutzt wird hier, dass Wörter beim Wiedererkennen äußerst nützlich sind, dies ist eine ihrer Grundfunktionen, die dem Menschen seine Orientierung in der Welt erleichtert.

"Ein Kind erwirbt sich gleichsam die Welt, indem es die Namen erlernt, mit denen es mehr und mehr Dinge wiedererkennen und in erneuter Begegnung durch Ausrufen des Namens gleichsam begrüßen kann." (Kamlah & Lorenzen 1967, S.46)

Dabei bietet sich die Gliederung der Welt der Sprache mehr oder weniger an. Ein Hund wird als Hund wahrgenommen, dadurch, dass er als »Hund« wiedererkannt werden kann, mit dem Benamen wird ihm ein Etikett verliehen. Kamlah und Lorenzen (1967) sehen in der Benutzung von Wörtern als Prädikatoren eine sprachliche Grundoperation. Die Prädikation ist für sie ein solch hervorstechendes Merkmal des Spracheinsatzes, dass sie nicht nur Eigenschaftswörter [Dies ist *rot*.] sondern auch Substantive [Dies ist ein *Hund*.] und Verben [Dies *klappert*.] als Eigenschaftswörter im allgemeinsten Sinne auffassen.

"Die Rekonstruktion der Prädikation als eines sprachlichen >Urphänomens< oder besser eben: als einer sprachlichen Grundoperation läßt noch deutlicher als bisher erkennen: ... Mit dem nötigen Vorbehalt ließe sich also sagen, daß auch die Substantiva und die Verben Eigenschaftswörter sind. Eigenschaftswörter in diesem allgemeinsten Sinne muß es in jeder Sprache geben." (Kamlah & Lorenzen 1967, S.38)

Beim prädikativen Analysieren ist es von Vorteil, wenn man gut mit Wörtern umgehen kann und einem dabei die Namen nicht ausgehen. Einmal gestiftet ist ein präziser Gebrauch der Wörter von Nöten: an den Wörtern (der Namenszuordnung) hängt die erkannte Systematik!

2.3 Denken und Sprache

Für den Zusammenhang zwischen Denken und Sprache ist es unschwer, zahllose Belege zu finden. Gerber (1884) hat verschiedene solcher Aussagen zusammengestellt, unter denen die älteste eine für die abendländische Kultur wegweisende Aussage Platons ist, die in ihrer geläufigen Kurzfassung lautet: Denken ist das innere Gespräch der Seele mit sich selbst.

"... so sagt Plato, Gedanke und Rede seien dasselbe, nur so, daß jener dessen innerliche Seite darstelle, diese die äußere. Wolle die Seele erkennen, so führe sie mit sich selber ein Gespräch, wenn auch unter Zurückhaltung der Stimme." (a.a.O., S.34)

Nicht nur bei Vertretern der Sprachphilosophie gilt die Rolle der Sprache im Erkenntnisprozess als vordringliches Problem. Denken und Sprache werden als untrennbar erachtet, das Denken kann sinnvoll nur da studiert werden, "wo es allein vollständig realisiert ist, – in der Sprache" (Müller 1888, S.31). Nicht zuletzt der Einfluss dieser besonderen Wertschätzung der Sprache hat in der Denkpsychologie die Untersuchung funktionaler Vorstellungen an die Seite gedrängt.

Tatsächlich haben wir uns auch daran gewöhnt, dass wir in Anlehnung an die Ergebnisse aus der Entwicklungspsychologie hinsichtlich der Ausformung des Denkens annehmen, dass die Repräsentationsformen »sensomotorisch«, »visuell«, »sprachlich-formal« in der Reihenfolge der gegebenen Nennung eine Hierarchie bilden. Zwar weist Bruner (1973, S.56) in *einem* Satz darauf hin (er spricht von enaktiv/ikonisch/symbolisch), dass zwar die beiden letztgenannten Arten die Entwicklung der jeweils früheren voraussetzen, dass aber "dann im Leben alle drei Repräsentationsformen mehr oder weniger selbständig für sich" bestehen. Die Konsequenzen, die sich aus dieser ergänzenden Bemerkung für die Untersuchung des Denkens ergeben, sind überhaupt noch nicht hinreichend reflektiert. Neben der Entwicklungspsychologie gilt die Behindertenpädagogik als der Bereich, der sich mit Sprachdefiziten beschäftigt: fehlen die Wörter muss in »Vorstufen« mit Bewegungen und Bildern gearbeitet werden. Kinder sind insbesondere in ihren sprachlichen Fähigkeiten zu fördern, Denken setzt an diesen sprachlichen Fähigkeiten an. Merkmalerkennung und -benennung stehen über dem Erkennen von Veränderungen (s. z.B. Schwanks (1996) Analyse des Klauerschen Trainings zum induktiven Denken).

Während sich beim prädikativen Denken eine besondere Leichtigkeit im Umgang mit Wörtern als nützlich herausstellt, ist beim funktionalen Denken bemerkenswert, dass die Wörter durchaus in den Hintergrund treten können, die Sprache also nicht das zentrale kognitive Werkzeug ist, mittels dessen sich Ideen herausbilden. Diese Position ist immer noch so revolutionär bzw. wirkt so fremdartig, dass wir verschiedene ihrer Vertreter zu Worte kommen lassen wollen. So antwortet Einstein in seinem Brief an Hadamard, der ihn zu seinem Denken befragt hatte:

"The words of the language, as they are written or spoken, do not seem to play any role in my mechanism of thought. The psychical entities which seem to serve as elements in thought are certain signs and more or less clear images which can be 'voluntarily' reproduced and combined. ... This combinatory play seems to be the essential feature in productive thought – before there is any connection with logical construction in words or other kinds of signs which can be communicated to others. ... The above mentioned elements are, in my case, of visual and some of muscular type. Conventional words or other signs have to be sought for laboriously only in a secondary stage ..." (Hadamard, 1945, p.142-143)

Dodge stellt – bevor er sich im Einzelnen mit den Mundbewegungen beim Sprechen von Wörtern befasst – unter der Überschrift »Meine Wortvorstellungen während des stillen Denkens« heraus, dass er sich eines Denkens ohne Worte bewußt ist:

"Das mechanische Denken bildet bei mir eine charakteristische Art der bildlichen Phantasie, und in den letzten paar Monaten, während konstruktiver Beschäftigung mit mehreren psychologischen Hilfsapparaten, habe ich mich gründlich überzeugen können, wie arm und unwesentlich die beigleitenden Wortvorstellungen dieses Denkens waren. ... Es gelingt mir, in der Phantasie die Räder drehen zu lassen und die Vorstellung des Widerstandes der Vorstellung der aufzuwendenden Kraft entgegen zu setzen. ... Immer war es äusserst schwierig, die Ergebnisse in Worte umzusetzen. ... Bei dem Versuch, das Denken selbst sich in Worten vollziehen zu lassen, hörte die eigentlich erfindende Tätigkeit gänzlich auf." (Dodge 1896, S. 9-10)

Das genannte Drehen der Räder findet sich bezeichnender-

weise wieder in "The Gears of My Childhood" bei Papert (1980), der u.a. die Turtle-Geometrie erfunden hat, in der beispielsweise ein Quadrat nicht über seine Eigenschaften definiert ist, sondern über einen diese besondere Figur erzeugenden Konstruktionsprozess.

Mitte letzten Jahrhunderts war van der Waerden zu einem von den Psychologen organisierten Symposium "Thinking and Speaking" eingeladen, um bezüglich der Mathematik Stellung zu nehmen. Sein Beitragstitel verrät bereits, worauf seine Argumentation hinaus läuft: "Denken ohne Sprache". Anhand eines historischen Fallbeispiels, Etienne Pascals Konstruktion der Schneckenlinie (Limaçon), führt er vor, dass Pascal "einen völlig klaren Begriff von der Kurve" gehabt habe, "bevor er den Namen erfand"; als wesentliche Vorstellung charakterisiert er die motorische Vorstellung: "... hat man sie vergessen, so hat man den Begriff der Kurve nicht mehr, auch wenn man weiß, wie sie aussieht" (Waerden 1954, S.166).

Die später als die pixelverarbeitenden Graphikprogramme entwickelten vektororientierten Graphikprogramme führen eindrücklich vor, dass nicht das Aussehen eines Kreises (beim Verändern) zentral ist, sondern erst im Verständnis seiner Konstruktion ein Qualitätssprung liegt.

Beim funktionalen Denken sind nicht vornehmlich Wörter sondern andere, schwerer fassbare Erzeugungsvorstellungen bedeutsam. Einstein nimmt auf sie Bezug als visuelle oder muskuläre Elemente, Dodge spricht von mechanischem Denken und van der Waerden von motorischen Vorstellungen. Man würde gerne wissen, wie Plato seine Formulierung gewählt hätte, wenn er an den modernen Errungenschaften der Naturwissenschaften und der Neuen Technologien teil gehabt hätte, waren doch vermutlich zu seiner Zeit motorische Vorstellungen greifbar nur an das im Vergleich zur reinen Lehre der Philosophie als wenig geistvoll erachtete Handwerk gebunden.

2.3 Eigene kognitionswissenschaftliche Experimente

Augenbewegungen als Spuren prädikativen bzw. funktionalen Denkens

In den Neurowissenschaften gilt der Mensch gemeinhin als Augenwesen. Dieses rührt daher, dass das Sehen den größten Teil des menschlichen sensorischen Cortex beansprucht (hier unterscheidet man ~ 30 verschiedene visuelle Verarbeitungsareale gegenüber ~ 6 auditorischen und ~ 5 somatosensorischen; z.B. Kandel et al. 1996). Wir stellen uns die Frage, inwieweit sich in den Augenbewegungen eines Menschen beim Analysieren einer Matrix-Aufgabe, mit dem Ziel eine stimmige Lösungsfigur zu konstruieren, Spuren prädikativen bzw. funktionalen Zurechtlegens zeigen. Inwieweit sind hierbei die Augen ein Werkzeug des Gehirns? Diese Fragen sind auch insoweit interessant als gar nicht klar ist, wie das Zusammenspiel »externe-Repräsentation – Augen – deren-Steuerung-über-das-Gehirn – Aufbau-eines-mental-Modells« funktioniert.

Im Folgenden stellen wir eine Auswahl charakteristischer Augenbewegungssequenzen beim Analysieren unserer Matrix-Aufgaben vor (s. auch Schwank 2001, Schwank et al. 2003, Cohors-Fresenborg et al. 2003). In Abb.3-6 stehen die Linien für die ruckartigen Augensprünge (Sakkaden), die sehr schnell ablaufen und keinen Informationsertrag bringen; die Kreise repräsentieren die länger anhaltenden Ruhepunkte der Augen zwischen je zwei Sakkaden, wäh-

rend dieser Fixationen findet Wahrnehmung statt (s. z.B. Galley 2001). Die Linien führen also da hin, wo hin geguckt wird. Die Fixationszeiten liegen in der Größenordnung von Zehntel-Sekunden.

Nicht alle Augenbewegungen während der Bearbeitungszeit sind aufschlussreich. Gerade bei längeren Bearbeitungszeiten, insbesondere wenn der Blick einer Versuchsperson [VP] herumirrt und sie vergeblich versucht, sich einen Reim auf das Erblickte zu machen, können sehr wirre Bilder entstehen. Im Rahmen unseres DFG-Projektes »Individuelle Unterschiede in der Kognition mathematischer Begriffsbildung« konnte die notwendige Software zur bildlichen Darstellung der Augenbewegungen und ihrer Auswertung hinsichtlich typischerweise auftretenden Mustern programmiert werden.

Die Abbildungen zeigen ausschnittsweise, wie sich der Blick verfangen kann. Abb.3 ist ein Beispiel für ein Schauen, dass sich mit den Paaren beschäftigt; Abb.4 zeigt das Zusammenbringen eines Tripels; Abb.5 macht sichtbar, wie zunächst die erste dann die zweite Zeile auf eine Systematik hin gescannt wird (vgl. dazu unsere obigen Analysen der Aufgaben). Tatsächlich begründen die VP anschließend ihre Lösungsfiguren (3: »Quadrat«, 4 u. 5: »Trapez«, 6a: verdrehtes Viereck mit umgeklappter Einfärbung, 6b: Wiederholung des großen Vierecks mit der Einfärbung links grau, rechts weiß) immer in Übereinstimmung mit ihren Augendaten.

Anmerkung:

Die merkmals- bzw. tätigkeitsorientierte Analyse der in Abb.3 gegebenen Aufgabe kann in den Augendaten zunächst nicht unterschieden werden. In beiden Fällen taucht zeilen- und/oder spaltenweises Scannen auf, d.h. ähnliche Muster wie in Abb.5.

Die mit Abb.6a und 6b gegebene funktionale bzw. prädikative Sichtung ist sehr spannend. Obwohl die Pfeile extern vorliegen und man meint, man würde von links nach rechts blickend die Pfeile wahrnehmen, ist das nicht bei jeder VP der Fall. Die Gleichartigkeit der Eckfiguren (wie auch der Pfeile) zieht bei prädikativem Analysieren die Blicke auf sich, nur bei einer funktionalen Analyse wird z.B. in der ersten Zeile die Sequenz auf die Reihe gebracht und dem Pfeil als Werkzeug zum Verändern des linken Objektes in das rechte Objekt ein Sinn gegeben. Die stabilen funktionalen oder prädikativen Verhaltensweisen unserer VP legen es nahe, dass das Gehirn die Augen entsprechend seines Interesses steuert, so dass entweder Merkmale ins Auge springen, die über ihre Gleichartigkeit in Verbindung gebracht werden können oder dass Unterschiede ins Auge springen, die über einen Prozess mittels Werkzeuganwendung ins Zusammenspiel gebracht werden können.

Die dermaßen stark ins Gewicht fallende Rolle des Gehirns stellt Singer (2001, S.15) deutlich heraus:

"Die Sinnessysteme und damit die Signale aus der umgebenden Welt werden somit nur über eine sehr kleine Fraktion von Verbindungen in die Großhirnrinde eingekoppelt. Das System beschäftigt sich hauptsächlich mit sich selbst; 80 bis 90% der Verbindungen sind dem inneren Monolog gewidmet."

Roth (1996⁴, S.65ff) stellt dazu ganz grundsätzlich fest, dass das Wort »Wahrnehmung« zwar so anmutet als ob dieser Interaktionsprozess mit der Umwelt uns prinzipiell zu wahren Vorstellungen führen würde, wir also *wahrnehmen*, "um Dinge und Vorgänge so zu erkennen, *wie sie tatsächlich sind*", diese Position aber nicht aufrecht gehalten werden kann.

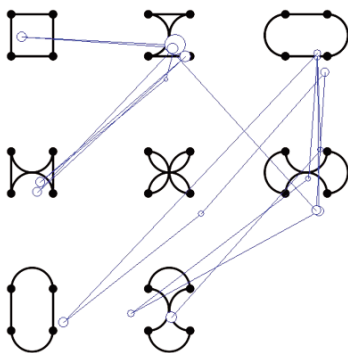


Abb.3: Zusammenschau ähnlicher Figuren zu Paaren
[D: 4sek; S: 6,8sek]

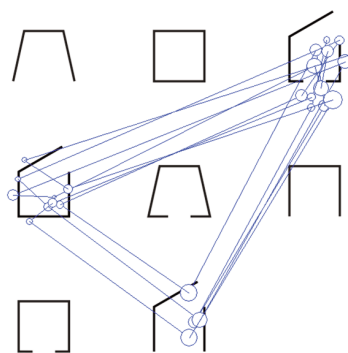


Abb.4: Zusammenschau ähnlicher Figuren zu einem Tripel
[D: 7sek; S: 28sek]

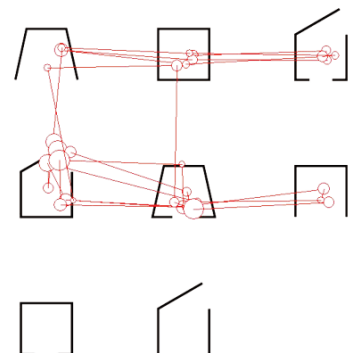


Abb.5: Zusammenschau sich wiederholender Merkmalsausprägungen
[D: 8,5sek; S: 44,5sek]

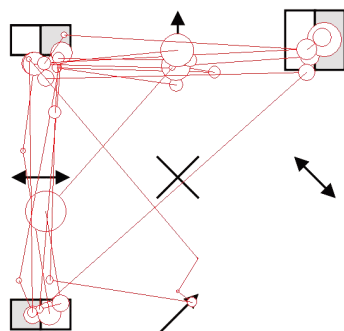


Abb.6a: Zusammenschau unterschiedlicher Elemente
[D: 12,5sek; S: 1min 46,5sek]

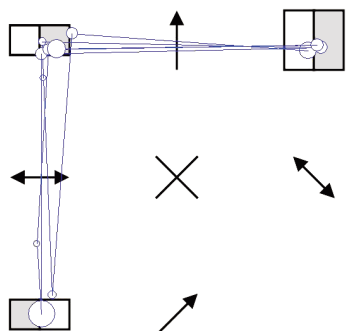


Abb.6b: Zusammenschau ähnlicher Elemente
[D: 3,5sek; S: 37sek]

Legende:
D: Dauer der Blickpfade
S: Startzeit der Blickpfade

EEG-Messungen

Die Daten aus EEG-Messungen während VP unsere Matrix-Aufgaben lösen, lassen sich nicht so augenscheinlich darstellen wie die dabei ausgeführten Augenbewegungen. Hier sei nur das Ergebnis aus einem interdisziplinären Projekt berichtet (Mölle et al. 1998): Im Vergleich zum funktionalen Denken und zu einer mentalen Entspannungsaufgabe reduzierte sich die EEG-Komplexität beim prädikativen Denken. Dies war besonders stark im rechten, posterioren Cortex ausgeprägt. Eine reduzierte Komplexität während des funktionalen Denkens konnte im linken zentralen Cortex nachgewiesen werden, wenn auch weniger ausgeprägt und nur im Vergleich zur mentalen Entspannung. Diesen Befunden, die zur Diskussion stellen, inwieweit bestimmte ausgewiesene Regionen im Gehirn verstärkt entweder beim prädikativen oder beim funktionalen Denken mitwirken, ist weiter nachzugehen, dabei sind auch noch andere bildgebende Verfahren anzuwenden.

2.4 Individuelle Unterschiede

Überlegungen zur Dekomposition des prädikativen und funktionalen Denkens führen zu bekannten Aufgabenarten der Experimentalpsychologie. Darunter sind solche, die vornehmlich das mentale Erkennen und Verwalten von Merkmalen erfordern, andere dagegen zielen auf das mentale Erkennen und Ausführen von Tätigkeiten (Beispieltypen s. Abb.8).

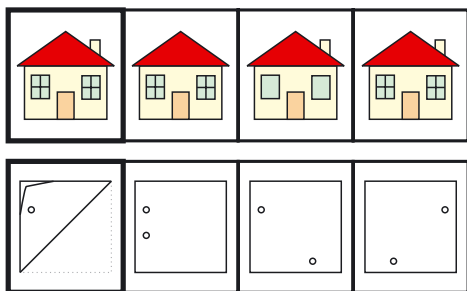


Abb.8: Aufgabe: Die links vorgegebene Figur ist unter den anderen drei Figuren wieder zu finden (unten: durch mentales Tun).

Kimura (1999) hat die erbrachten Leistungen bei diesen beiden Aufgabenausrichtungen unter geschlechtsspezifischem Aspekt analysiert. Passend zu den Ergebnissen unserer eigenen Untersuchungen, dass sich Mädchen häufig durch gute prädikative Leistungen auszeichnen, selten aber durch gute funktionale, und dass es bei den Jungen, wenn auch nicht ganz so extrem, umgekehrt der Fall ist, stellt sich heraus, dass die Stärke von Frauen bei den merkmalsorientierten Aufgaben liegt, die Stärke von Männern dagegen bei den tätigkeitsorientierten Aufgaben. So verwundert auch nicht, dass Frauen bei Tests zur Ideen- und Wortflüssigkeit, bei denen Gegenstände derselben Farbe oder Wörter mit demselben Anfangsbuchstaben aufgezählt werden sollen, gegenüber Männern im Vorteil sind. Die Fähigkeit zur mentalen Rotation (Aufgabenvariante s. Abb.9) ist eine der am Besten untersuchtesten, bei der ein starker geschlechtsspezifischer Unterschied zu Gunsten der Männer auftritt. Jordan et al. (2002, p.2397) kommen in ihrer FMRI-Studie hinsichtlich involvierter motorischer Komponenten zu folgendem Ergebnis:

"Both man and women showed activation of the premotor areas, but men also showed an additional significant activation of the left motor cortex. ... Our results suggest that there are genuine between-sex differences in cerebral activation patterns ..."

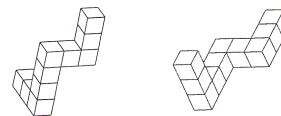


Abb.9: Aufgabenstellung: Kann die eine Figur in die andere überführt werden? (Sind die Figuren also gleich oder unterschiedlich?)

Richter et al. (2000) vermuten, dass es auf die Perspektive ankommt, die VP beim mentalen Rotieren einnehmen: Bei einer "internal perspective", stellt man sich vor, man würde ein Objekt selbst manipulieren, bei einer "external perspective" stellt man sich vor, wie jemand anderes ein Objekt manipuliert. Jordan et al. (2002, p.2406) schreiben dazu:

"men take a more concrete, and, literally "hands on" approach, as evidenced by activation of the primary motor cortex."

Eine Aufgabe für die Zukunft wäre, zu untersuchen, wie sich bei der Bearbeitung von Mathematik-Aufgaben, die diese Perspektiven ermöglichen, die Rolle der Perspektiven »Täter/Beobachter« auswirkt und wie durch die Wortwahl eine Perspektive etwa angesteuert werden kann; z.B. "Auf einem w Meter langen Weg sollen alle a Meter Sträucher gepflanzt werden / auf einem w Meter langen Weg befinden sich im Abstand von a Metern Sträucher. – Wie viele Sträucher werden benötigt? / Wie viele Sträucher sind vorhanden?" (s. auch Aufgabenbeispiele in Hefendehl-Hebeker 2003; Sjuts 2002).

3. Mathematikdidaktische Materialien

Aus der Tatsache, dass sich Menschen dahingehend unterscheiden, dass sie eher zu der einen oder der anderen kognitiv gesteuerten Wahrnehmung »prädikativ-funktional« befähigt sein können, ergibt sich eine generelle methodische Anfrage an mathematikdidaktische Materialien/Lernumgebungen. Wie bei den Matrix-Aufgaben gibt es Materialien, die eher eine der beiden Denkweisen ansprechen. Wir können ein solches außerordentlich umfangreiches Analyseprogramm in diesem Beitrag nur kurz streifen und beschränken uns darauf, als Alternative zu den gängigen – eher die prädikative Denkweise ansprechenden – Vorgehensweisen funktionalere Ansätze für den ersten Erwerb von Rechenoperationen vorzustellen.



Abb.9: Anmalen in verschiedenen Farben als Addieren. 4 blaue Blumen und 2 rote Blumen ergeben ?

Am weitesten verbreitet in den Schulbüchern für die 1. Klasse sind solche Darstellungen der Addition, die den Vorgang ausblenden (Abb.9). Der Zerlegungsgedanke, mit dem besonderen Wunsch, in *einem* Arrangement sowohl die beiden Argumente (oft unglücklich gekennzeichnet durch unterschiedliche Farben) als auch das Ergebnis sehen zu wollen (unbefriedigend gelöst für den Fall der Subtraktion: wie soll auch etwas *gleichzeitig* vorhanden sein [als Subtrahend] und nicht vorhanden [in der Differenz]?) ist in diesen Büchern fast durchgängig realisiert. Nicht in allen finden sich dagegen dynamischere Vorstellungen wie ein Zahlenstrahl, auf dem sich entlang bewegt wird, oder wie Rechenbefehlskonzepte (bekannter aus der Zeit in der das operative Prinzip "modern" war; - allerdings auch mit Mühen in der Darstellung).

3.1 Pluslandschaft [PL] und Mallandschaft [ML]

Ruf & Gallin (1995) führen Rechenlandschaften (Abb.10) ein, die der Erschließung des Zahlenraums insoweit dienen, dass Zahlen als erreichbar über das Addieren oder Multiplizieren angesehen werden und diesbezügliche Nachbarschaftsverhältnisse offenkundig werden. Zentral ist das dynamische Umherwandern in diesen Landschaften.

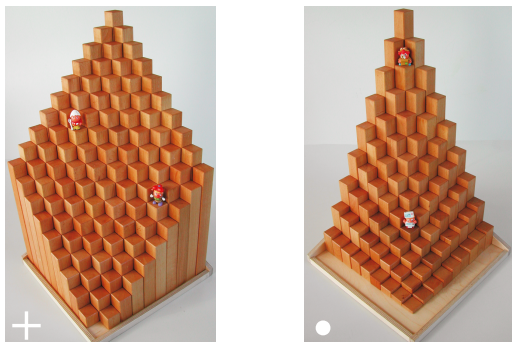


Abb.10: 3D-Rechenlandschaften aus Holzquadern:
In der Pluslandschaft ist das »0+0« dargestellt,
in der Mallandschaft das »1•1«.

Rechnen ist Herumlaufen, ein Ziel kann über viele Wege erreicht werden, unterschiedliche Ziele stehen in Wegverbindungen zueinander.

Statisch betrachtet ist sowohl die PL als auch ML ein 3-stelliges Prädikat, da eine einzelne Stabplattform in ihrer Position durch drei Aspekte bestimmt ist: längs, quer, hoch. Das Prädikat (2,6,8) beispielsweise entspricht in der PL der Gleichung $2+6=8$. Das Umherwandern lässt sich mathematisch durch den Wechsel der Sichtweise vom 3-stelligen Prädikat zur 2-stelligen Funktion beschreiben: Jede Plusrechnung bedeutet ein Wandern, bei dem man nacheinander die beiden Argumente der Funktion aufnimmt, entsprechend weit in Längs-, dann in Querrichtung die Treppen hoch steigt und so auf der Zielplattform, dem Funktionswert, landet. Die Kinder *erwandern* und *erfahren* so, dass es viele Wege zum Erreichen eines Zieles gibt. Manchmal lohnt sich ein Umweg, damit man sich ein Stück weit auf einem bequemen Weg bewegen kann. Bequem ist ein Weg dann, wenn man nicht mehr alle Stufen einzeln zu nehmen braucht, sondern sich durch wohlbekanntere Rechnungen gleichsam hochzaubern kann, um dann von einer Plattform in der Nähe der Zielplattform die restlichen Stufen zu beschreiten: $98+99=100+100-2-1$. Termumformungen nennen das die Mathematiker. Der Übergang von der PL zur ML geschieht durch das bereits angelegte Springen mit gleicher Sprungweite, das offenbar schon beim Addieren besonders hilfreich war: Summen mit lauter gleichen Summanden sind sehr geeignet, um sich unangenehme Additionsaufgaben angenehm zu machen. Bei der ML stehen die Treppen mit unterschiedlichen Stufenhöhe unmittelbar nebeneinander. Wie beim Addieren wird Multiplizieren zunächst als anstrengendes Treppensteigen erlebt. Angenehme Umwege (geeignete Termumformungen) für unangenehme Rechnungen gibt es auch hier. Entscheidend ist, dass das Faktorisieren – die höher stehende Tätigkeit als das Ausmultiplizieren – ganz ins Zentrum rückt: Welches war die zugehörige Rechnung, wenn du dich auf einer bestimmten Plattform befindest? Dass die Kinder bei all diesen Bewegungen mit Addieren vertraut werden und beinahe unbemerkt das Einmaleins lernen, versteht sich von selbst (s. auch Steinkamp 2002).

Ein Ziel des Arbeitens mit der Plus- oder Mallandschaft ist es, die Kinder zur Beweglichkeit beim mathematischen Umformen zu ermuntern und sie die Vorteile des eigenständigen Abänderns einer vorgegebenen Rechenaufgabe erfahren zu lassen. Bei so viel Beweglichkeit wundert es nicht, dass diese Rechenlandschaften keine bunten Markierungen kennen und die Plattformen weder mit der zugehörigen Rechenaufgabe noch mit dem Resultat, der Höhe, etikettiert sind. Farben und Beschriftungen (die sich der prädikative Blick sofort wünscht) würden das Augenmerk auf ein statisches *Da-sein* lenken, dem aber gilt hier nicht das Interesse.

[Anmerkung: Hinter der Mallandschaft steht der Graph der Funktion $z=xy$, der die Form eines parabolischen Hyperboloids aufweist. Durch die Endlichkeit des dargestellten Bereichs wird die Vorstellung für die Fortsetzung der Landschaft in die Unendlichkeit gleichsam erzwungen. Die Fortsetzung über den Sattelpunkt (0,0,0) hinaus führt zwanglos zur Einsicht, dass Minus mal Minus Plus geben muss. Jeder in der Argument-Ebene (x-y-Ebene) gerade Weg führt zu einer arithmetischen Folge 2. Ordnung in den Multiplikationsergebnissen (z-Höhen). Diese »krummen Touren« zeigen durch die parabolische Gestalt die ästhetische Seite der Mallandschaft, welche beispielsweise in der 3. Binomischen Formel $(a-x)(a+x)=a^2-x^2$ gerinnt und in der geometrische Aussage gipfelt, dass unter allen Rechtecken mit konstantem Umfang das Quadrat die grösste Fläche hat. Schließlich sind das Aufstellen und Einräumen der Landschaften herausfordernde Übungen im Ordnen, Addieren Faktorisieren und Aufaddieren arithmetischer Folgen 1. Ordnung, denn tatsächlich lässt sich jede Landschaft zu einem einzigen großen Quader zusammenfügen.]

3.2 Rechenwendeltreppe [RWT]

Die Rechenwendeltreppe (Abb.11; Aring & Blocksdorf 2003) ist für den Einsatz im Erstrechenunterricht gedacht. Die Zahlen von 0 bis 9 sind im inneren Kreis durch eine entsprechende Anzahl gelber Kugeln repräsentiert, die Zahlen von 10 bis 19 im äußeren Kreis an der zur inneren Anordnung passenden Stelle durch 10 blaue Kugeln und eine entsprechende Anzahl gelber Kugeln. Das besondere Augenmerk gilt den Rechenoperationen, die als Zauberschilder ins Spiel kommen. Mit ihrer Hilfe können die Figuren auf der Treppe Sprünge vollführen. Bevor eine Bewegung ausgeführt werden kann, muss die Figur sich zunächst für ein Schild entscheiden. Die Rechensätze sind Beschreibungen für das Springen der Figuren und werden über den Zwischenschritt einer visuellen Darstellung eingeführt (vgl. Abb.11). Tausch- und Umkehraufgaben erschliessen sich über die Bewegungen in naheliegender

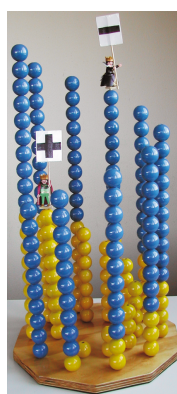


Abb.11:
Rechenoperationen als
Sprunghilfen auf der
Treppe.

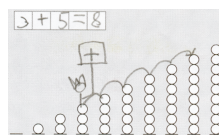


Abb.12:
»+« für Bewegung

Weise. Die Subtraktion wird dabei anders als in schulbuchüblichen Darstellungen tatsächlich als eine Umkehroperation der Addition erlebt, die die Kinder in dieser Funktion selbst als Bedarf erkennen, schließlich möchte eine Figur auch mal wieder die Treppe herunter kommen. Die Analogieaufgaben werden dadurch begreifbar, dass sich eine Figur mit ihrem Schild auf dem inneren Kreis bewegt und parallel dazu eine andere Figur mit ihrem Schild auf dem äußeren Kreis: Die 10 blauen Kugeln im äußeren Kreis bleiben konstant, bezüglich der gelben Kugeln führt die gleiche Bewegung zu gleichen Ergebnissen. Die Null hat in der RWT einen natürlichen Platz, nämlich dort, wo man landet, wenn man auch noch von der 1. Stufe eins runtergeht (eine Kellertreppe würde die negati-

ven Zahlen eröffnen). Dass die Zäsur bei 9 gemacht wird, erklärt sich für die Kinder, wenn sie die Zahlen für die Anzahlen der Kugeln schreiben. Die in der RWT mit den Zauberschildern » + «, » - « sich bewegenden Figuren, geben den Kindern die Möglichkeit, sich in die Rolle der Handlungsträger zu versetzen und so statt einer Beobachtungsperspektive eine Täter-Perspektive einzunehmen.

3.3 Dynamische Labyrinth [DL]

Die »Dynamischen Labyrinth«, denen ein Berechenbarkeitskonzept aus der Automatentheorie zu Grunde liegt, sind unter den hier besprochenen Materialien die konsequenteste Umsetzung einer Verdinglichung von Rechenoperationen (Cohors-Fresenborg 1976, Schwank et al. 2003). Bei der PL/ML sowie der RWT existieren die Rechenaktionen nur im Augenblick ihrer Ausführung. Diese Flüchtigkeit ist unbefriedigend, steht die Tätigkeit doch im Mittelpunkt der Reflektion. DL-Maschinen repräsentieren Funktionen, die Argumente werden zu Inputs, die Funktionswerte entstehen als Outputs. Der als Maschine zu erfindende Mechanismus realisiert die Funktion (Abb.13).

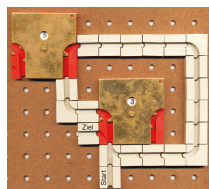


Abb.13: Additionsvorgang festgehalten mittels einer Maschine. Fortgesetztes Vorwärtszählen im oberen Speicherplatz - solange bis im unteren Speicherplatz durch Rückwärtszählen die Null erreicht wird - regelt das Addieren.

Zu allen berechenbaren Funktionen existieren solche Erzeugungsmaschinen. Die Verwandtschaft z.B. von Addition und Subtraktion zeigt sich darin, dass die Subtraktionsmaschine eine Art Additionsmaschine ist, in der das 2. Argument nicht anzeigt, wie oft im Ergebnisspeicher vorwärts- sondern wie oft dort rückwärtsgezählt wird. Termumformungen sind wichtig, um den Aufwand einer Berechnung kurz darzustellen, aber auch, um auf Ideen für Maschinen zu kommen, die mit geringerem Aufwand auskommen. Das Konzept der »DL« ist erweiterbar und führt über die dazu passende Registermaschinensprache als einer formalen Darstellung von Handlungsabläufen zu einem tragfähigen dynamischen Funktionsbegriff, wobei mehrstellige Argumente von Anfang an auf selbstverständliche Weise vorkommen und die Beschäftigung mit eingesetzten Funktionen zum Alltagsgeschäft gehört. Die formale Darstellung kommt prädikativ Denkenden entgegen, ihre Korrektheit wird auch für eher funktional Denkende verpflichtender, da die Konsequenzen beim tatsächlichen Ablauf verheerend sein könnten (zur Erweiterung s.:

http://www.ikm.uos.de/aktivitaeten/iaa_msw/iaa_msw.html).

4. Ausblick

Bei den besprochenen didaktischen Materialien haben wir auf der mathematischen Sachebene die Potentiale für die Förderung funktionalen Denkens herausgearbeitet, also eine kongitionstheoretische Stoffdidaktik betrieben. Wir wollen zum Schluß noch auf zwei empirische Studien eingehen, die aus der Analyse von Schülereigenproduktionen Hinweise auf die Nützlichkeit von prädikativem und funktionalem Denken für die Erklärung von Leistungsunterschieden geben.

An der 2. Runde der von uns durchgeführten Osnabrücker Zwergen-Mathe-Olympiade [ZMO] für Drittklässler

nahmen in diesem Jahr aus 86 Klassen je ein Mädchen und ein Junge teil. Betrachten wir als ein Beispiel – unter geschlechtsspezifischem Aspekt – den Bearbeitungserfolg bei folgender, innerhalb des Wettbewerbs relativ schweren Aufgabe:

Im Zirkus Knobelix sitzen 224 Zuschauer. Es sind 38 Erwachsene mehr als Jungen und 6 Jungen mehr als Mädchen.

Wie viele Mädchen, Jungen und Erwachsene sitzen auf den Zuschauerbänken?

	Mädchen	Jungen
Diamantgruppe	1 (3)	3 (3)
Goldgruppe	2 (10)	9 (17)
Silbergruppe	2 (41)	5 (36)
Bronzegruppe	0 (32)	1 (30)
	5 (86)	18 (86)

Tab.1: Bearbeitungserfolg der Mädchen und Jungen bei der Berechnung der Zuschauer-Aufteilung (angegeben pro Leistungsgruppe mit Nennung der Gruppengröße).

Insgesamt ist der Bearbeitungserfolg nicht sehr hoch, er fällt besonders gering bei den Mädchen aus (Tab.1). Die Stärke der Jungen bei der Aufgabenbearbeitung liegt darin, dass sie sich mit den Zahlen auf einen Weg einlassen und ihre Erkundigungen zu einer sich aus der Zielpeilung ergebenden, abgeänderten Vorgehensweise nutzen können. Bei keinem der Mädchen ist aufgrund der Aufzeichnungen ein solches Verhalten im Zahlenjonglieren ersichtlich. Dabei wäre es funktional so einfach: ein Kind nimmt sich eine Zahl, die in der richtigen Größenordnung liegt (also z.B. weder 50 noch 200) und schaut, wie weit es damit kommt, anschließend justiert es nach; per selbst zurecht gelegter Regula Falsi gelangt es zum Ziel (Abb.14).

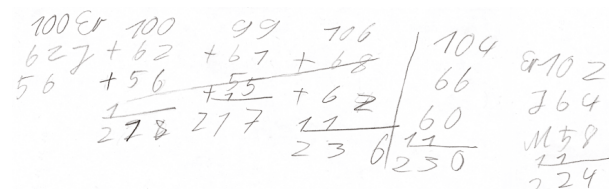


Abb.14: Ein ZMO-Junge entwickelt das Ergebnis.

Es wäre eine wichtige Aufgabe (nicht nur für den Primarstufenbereich), das Denken und Zurechtlegen in »Bewegungen« und »Abläufen« zu fördern. Einige der Jungen bringen dieses Talent von sich aus in besonderem Ausmaß mit, aber die Mädchen wären besonders darauf angewiesen. Hier steht auch die LehrerInnenausbildung vor einer großen Aufgabe.

Wie wird es diesen Grundschulkindern weiter ergehen? In der späteren Schulmathematik ist die Fähigkeit, Sachverhalte formal zu repräsentieren (z.B. die Zuschauer-Aufgabe), eine wichtige Kompetenz, die zwar den prädikativ Denkenden eher liegt, die aber auch funktional Denkende beherrschen müssen. Sjuts (2002) hat in seinen Analysen aufgezeigt, wie bei Aufgaben aus der Sekundarstufe I die Präferenzen für prädikatives bzw. funktionales Denken zu unterschiedlichen Lösungen führen, sichtbar auch in den formalen Repräsentationen: beispielsweise Strukturgleichungen, die eine Situation beschreiben, (Friederikes Lösung, S.120) oder Funktionsgleichungen, die einen zeitlichen Ablauf widerspiegeln (Clemens' Lösung, S.120).

In Knoche et al. (2002) sind die Mathematikleistungen der deutschen Jugendlichen bei PISA 2000 darauf hin analysiert, wie sie mit der Lesekompetenz und den kognitiven Grundfertigkeiten korrelieren. Dieses wurde sowohl für die Gesamtstichprobe als auch nach Schularten getrennt durchgeführt. Die Autoren sehen als Konsequenz ihrer Analyse einen Forschungsbedarf für detailliertere Analysen, um nicht nur gewisse Korrelationen zu entdecken, sondern auch dahinter liegende kognitive (auch emotionale) Mechanismen zu identifizieren. Wir können eine Richtung angeben, in der Erklärungen für den einen oder anderen Befund denkbar sind: Vor dem Hintergrund, dass in allen unseren Untersuchungen es nur selten Mädchen mit einer Präferenz für funktionales Denken gab und dass in PISA 2000 die Mädchen signifikant höhere Lesekompetenz zeigten, stellt sich für weitere Untersuchungen, z.B. bei PISA 2003, die Frage, ob nicht die in PISA 2002 erkannte (je nach Schulart oder Gesamtstichprobe nicht immer signifikant) bessere Mathematikleistung der Jungen teilweise auch durch die geschlechtsspezifisch unterschiedliche Verteilung von prädikativem und funktionalem Denken erklärt werden kann.

5. Literatur

- Aring, A.; Blocksdorf, K. (2003): Rechnen im 1. Schuljahr: Betritt die Rechenwendeltreppe. - Staatsarbeit, Universität Osnabrück.
- Bateson, G. (1995⁴): Geist und Natur: eine notwendige Einheit. - Frankfurt: Suhrkamp.
- Bruner, J. (1964): Der Verlauf der kognitiven Entwicklung. In D. Spanhel (1973, Hrsg.), *Schülersprache und Lernprozesse*. Düsseldorf: Schwann
- Carpenter, P.; Just, M.; Shell, P. (1990): What one intelligence test measures: a theoretical account of the processing in the Raven progressive matrices test. - *Psychological Review*. Vol. 97, No. 3, pp.404-431.
- Cohors-Fresenborg, E. (1976): Dynamische Labyrinth - In: *Didaktik der Mathematik*, S.1-21.
- Cohors-Fresenborg, E.; Brinkschmidt, S.; Armbrust, S. (2003): Augenbewegungen als Spuren prädikativen oder funktionalen Denkens. - *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Jg.35 (H.3), S.86-93.
- Damasio, H.; Grabowski, T.; Tranel, D.; Ponto, L.; Hichwa, R.; Damasio, A. (2001): Neural correlates of naming actions and of naming spatial relations. - *Neuroimage*, 13, pp.1053-1064.
- Dodge, R. (1896): Die motorischen Wortvorstellungen. - Halle a.S.: Max Niemeyer.
- Galley, N. (2001): Physiologische Grundlagen, Meßmethoden und Indikatorfunktion der okulomotorischen Aktivität. In F. Rösler (Hrsg.), *Grundlagen und Methoden der Psychophysiologie*. Göttingen: Hogrefe, S.237-316.
- Gerber, G. (1884): Die Sprache und das Erkennen. In: S. Schmidt (1971, Hrsg.), *Philosophie als Sprachkritik im 19. Jahrhundert*, Textauswahl Band II. - Stuttgart-Bad Cannstadt: Friedrich Frommann, S.19-60.
- Gorgé, V. (1960): Philosophie und Physik. Die Wandlung zur heutigen erkenntnistheoretischen Grundhaltung in der Physik. - Berlin: Duncker & Humblot.
- Hadamard, J. (1945): *The psychology of invention in the mathematical field*. - New York: Dover.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2003): Didaktik der Mathematik als Wissenschaft - Aufgaben, Chancen, Profile. In: *Jahresbericht der DMV 105*, Heft 1, S.3-29.
- James, W. (1907): Pragmatism's Conception of Truth. In W. James, *Pragmatism: A new name for some old ways of thinking*. - New York: Longman Green and Co, Lec.6, pp.76-91.
- Jordan, K.; Wüstenberg, T.; Heinze, H.-J.; Peters, M. (2002): Women and men exhibit different cortical activation patterns during mental rotation tasks. - *Neuropsychologia* 40, pp.2397-2408.
- Kable, J.; Lease-Spellmeyer, J.; Chatterjee, A. (2002): Neural substrates of action event knowledge. - *Journal of Cognitive Neuroscience*. pp.795-805.
- Kandel, E.; Schwartz, J.; Jessell (1996): *Neurowissenschaften*. - Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Kamlah, W.; Lorenzen, P. (1967): *Logische Propädeutik oder Vorlesung des vernünftigen Redens*. - Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Kimura, D. (1999): *Sex and cognition*. - Cambridge: MIT Press.
- Knoche, N.; Lind, D.; Blum, W.; Cohors-Fresenborg, E.; Flade, L.; Löding, W.; Möller, G.; Neubrand, M.; Wynands, A. (2002): Die PISA-2000 Studie, einige Ergebnisse und Analysen. - *Journal für Mathematikdidaktik*, Jg.23(H.3/4), S.159-202.
- Möller, M.; Schwank, I.; Marshall, L.; Klöhn, A.; Born, J. (2000): Dimensional complexity and power spectral measures of the EEG during functional versus predicative problem solving. - *Brain and Cognition*. Vol. 44, No. 3, pp.547-563.
- Müller, F. (1888): Das Denken im Lichte der Sprache. In: S. Schmidt (1971, Hrsg.), *Philosophie als Sprachkritik im 19. Jahrhundert*, Textauswahl Band II. - Stuttgart: Friedrich Frommann.
- Papert, S. (1980): *Mindstorms. Children, Computers and Powerful Ideas*. - New York: Basic Books.
- Preiß, H.; Pulvermüller, F.; Lutzenberger, W.; Birbaumer, N. (1995): Evoked potentials distinguish between nouns and verbs. - *Neuroscience Letters* 197, pp.81-83.
- Pulvermüller, F.; Härle, M.; Hummel, F. (2000): Walking or talking?: Behavioral and electrophysiological correlates of action verb processing. - *Brain and Language*, 78, pp.143-168.
- Raven, J. C. (1965): *Advanced progressive matrices. Sets I and II*. - London: Lewis.
- Roth, G. (1996⁴): *Das Gehirn und seine Wirklichkeit. Kognitive Neurobiologie und ihre philosophischen Konsequenzen*. - Frankfurt a. M.: Suhrkamp.
- Ruf, U.; Gallin, P. (1995): Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. *Sprache und Mathematik*. 1.-3. Schuljahr. - Zürich: Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.
- Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. - *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (H. 6), S.168-183.
- Schwank, I. (1998/2000): QuaDiPf - Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken. Sets A-D. - Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik
- Schwank, I. (2001): Analysis of eye-movements during functional versus predicative problem solving. In: J. Novotna (Ed.): *European research in mathematics education II*.- Prague: Charles University, pp.489-498.
- Schwank, I.; Armbrust, S.; Libertus, M. (2003): Prädikative versus funktionale Denkvorgänge beim Konstruieren von Algorithmen. - *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Jg. 35 (H.3), S.79-85.
- Singer, W. (2001): Neurobiologische Anmerkungen zum Konstruktivismus-Diskurs. - Vortrag im Rahmen des konstituierenden Workshops der Felix Burda Lectures in Fessenbach, 15.09.2001.
- Sjuts, J. (2002): Unterschiedliche mentale Konstruktionen beim Aufgabenlösen. - *Journal für Mathematikdidaktik*, Jg.23 (H.2), S.106-128.
- Steinkamp, S. (2002): Dialogisches Lernen im Primarstufenunterricht zum Verständnis der Multiplikation. - Staatsarbeit, Universität Osnabrück.
- Tyler, L.; Stamatakis, E.; Dick, E.; Bright, P.; Fletcher, P.; Moss, H. (2003): Objects and their actions: evidence for a neurally distributed semantic system. - *NeuroImage*, 18, pp.542-557.
- Van der Waerden, B.L. (1954): Denken ohne Sprache. In G. Révész (ed.), *Thinking and speaking*. - Amsterdam: North-Holland, pp.165-174.
- Wittenberg, A.I. (1968²): *Vom Denken in Begriffen. Mathematik als Experiment des reinen Denkens*. - Basel: Birkhäuser.

Autorin

Schwank, Inge, Prof. Dr., Institut für Kognitive Mathematik, Universität Osnabrück, 49069 Osnabrück
Email: schwank@mathematik.uni-osnabrueck.de