




# Плекаймо математичні таланти дітей!

- Збірник олімпіадних завдань -

Інге Шванк



$\begin{array}{r} \blacksquare - \blacklozenge = 2 \\ \blacksquare \cdot \blacksquare - \blacklozenge \cdot \blacklozenge = 20 \end{array}$



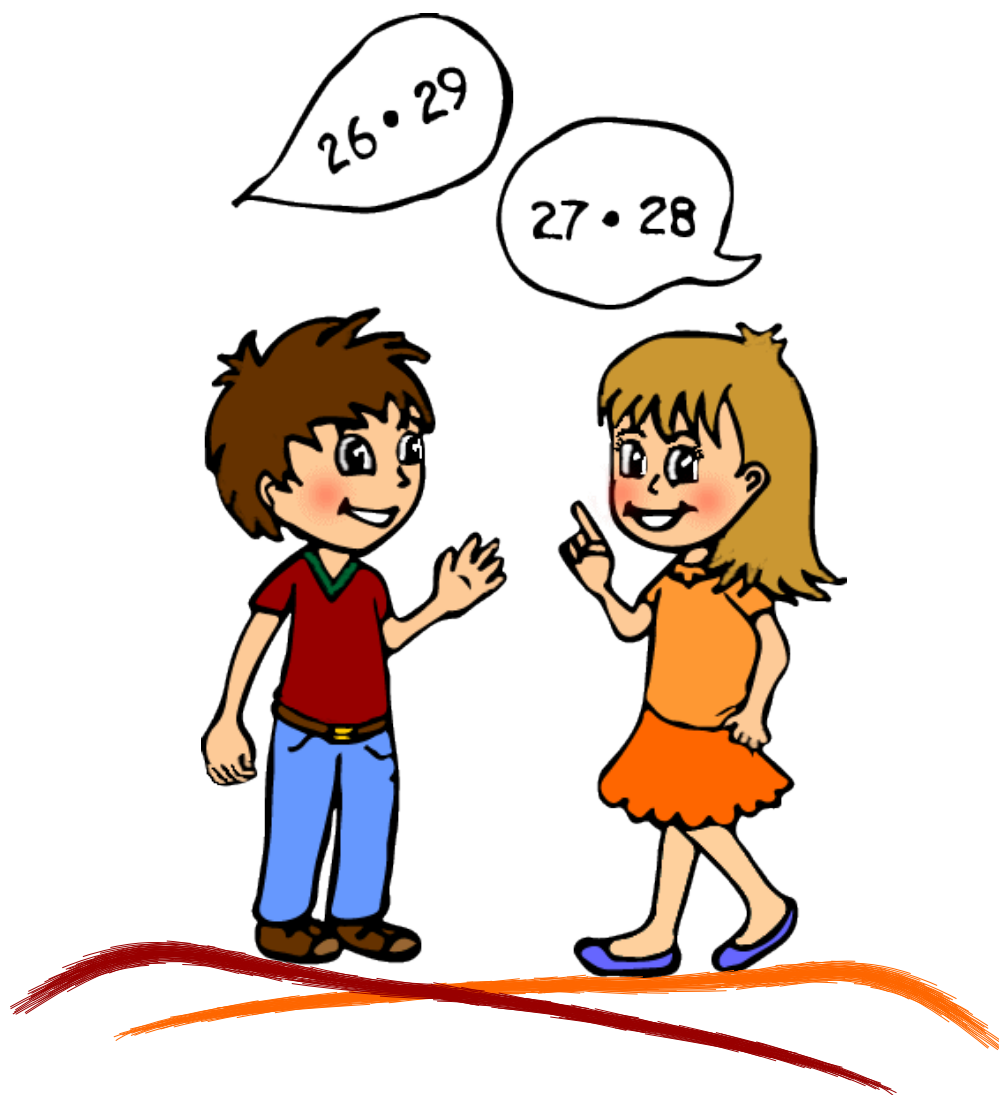
ZMO 2007



# Плекаймо математичні таланти дітей!

- Збірник олімпіадних завдань -

Інге Шванк





Місце зустрічі «Дошкільна математична освіта»

Науковий напрямок: проф. д-р Інге Шванк

**Шванк Інге**  
**Плекаймо математичні таланти дітей!**  
**- Збірник олімпіадних завдань -**

3 вид. Оснабрюк, 2018  
Серія публікацій Дослідницького Інституту математики і дидактики, № 42  
ISBN 978-3-925386-59-6

**Розроблено**  
**Місце зустрічі «Дошкільна математична освіта»**

у співпраці з багатьма членами МОГ. команда 2001-2013 р.н.,  
(також дивіться список команд МОГ в кінці книги);  
Ілюстрації переважно Бургіс Гофманн - (також обкладинка),  
Крістіна Шапер і Елізабет Шванк

**Допомога в розробці української версії, включаючи переклад:**  
Тетяна Жиленко

**Ми вдячні нашому головному спонсору**



*Stiftung*  
*Stahlwerk Georgsmarienhütte*

**©Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e. V.**  
**[Дослідницький Інститут математики і дидактики]**  
Поштова скринька 18 47  
D-49008 Оснабрюк



# Зміст

Висловлення дітей-учасників МОГ .....	I
• про їхнє ставлення до математики	
• щодо своїх вчителів	
А. Вступ .....	VI
Б. Збірник олімпіадних завдань .....	X
Математична олімпіада гномів [МОГ] - Обшивальний лист .....	XIV
Зміст .....	XVI
1. Уважне обчислення .....	1
2. Загадки про числа та арифметичні дії з ними .....	11
3. Арифметичні закономірності .....	29
4. Операції з вибором .....	41
5. Текстові задачі .....	57
6. Образні моделі .....	87
7. Все добре, що добре закінчується .....	109
В. Перспектива .....	XVIII
Д. На завершення .....	XXIII
Сертифікати (шаблони копій)	
МОГ - учасники групи	
Висловлювання дітей-учасників МОГ .....	XXXII
• Чому ви хочете взяти участь?	



# МОГ

Математична олімпіада гномів

# Замість вступу

Висловлення дітей-учасників МОГ (ZMO) про їхнє ставлення до математики

Висловлення дітей-учасників МОГ щодо своїх вчителів



**МОГ** - Математична олімпіада гномів, конкурс для учнів 3-х класів міста та району Оснабрюк, який проводиться в рамках дослідження «Дошкільна математична освіта» протягом 13 років спільними зусиллями Інституту когнітивної математики Університету Оснабрюк та Дослідницького Іституту математики і дидактики.

# Висловлення дітей-учасників МОГ

Нам подобається математика...

Das Mathe Spaß macht und es regt die schwarzen Zellen<sup>an</sup>. Das man denken muss und Knobeln.

Ця математика весела і стимулює клітини вашого мозку.  
Треба думати й ламати голову.



aller все

... das man ein schönes Gefühl hat, wenn man eine schwierige Aufgabe gemacht hat.

... треба розв'язати важке завдання -  
приємне відчуття.

- dass man manchmal auf verschiedene Art und Weise zu Lösungen kommen kann,
  - іноді можна знайти розв'язок різними засобами
  - все можна робити самостійно або в команді
  - можна використовувати і застосовувати математику щодня
- dass man alleine oder im Team arbeiten kann,
- dass man Mathe jeden Tag brauchen kann.

Ich finde es total spannend, fast wie ein Detektiv Rätzel und Aufgaben zu lösen.

Я вважаю це захоплюючим, майже як розгадування загадок і завдань в детективі.

Das Kopfrechnen, weil das mich richtig in Schwung bringt, Knobel-Aufgaben dann kann mein Gehirn mal richtig dampfen, und sonst gefällt mir auch alles an der Mathematik.

Ментальна арифметика - це дійсно змушує мене працювати, складні завдання - мій мозок може працювати сам, а також мені подобається все в математиці.



Mathe ist spannend, abwechslungsreich mit guten Aufgaben. Mathematik braucht man für Leben und für den normalen Alltag. Mathe bietet leichte, mittel und schwierige Aufgaben. Mathe fördert das Gehirn. Und außerdem macht Mathe einfach Spaß.

Математика захоплююча і пропонує великі варіації з хорошими завданнями. Математика потрібна і для життя, і для повсякденних справ. Математика пропонує легкі, середні та складні завдання. Математика виховує мозок. А також математика - це просто розвага.

das wir immer etwas Neues lernen. Mathematik ist für das eigene Leben, für die Zukunft und einen guten Beruf wichtig. Dividieren, subtrahieren mal nehmen oder addieren - Rechnen macht natürlich Spaß, wenn du Mathe gerne hast.

Щоб ми постійно дізнавались щось нове. Математика важлива для власного життя, для майбутнього та для отримання хорошої роботи. Звичайно, ділити, віднімати, множити та додавати весело, якщо вам подобається математика.

das es viel Spaß macht. Man kann nicht nur rechnen, sondern auch zeichnen, messen oder etwas wiegen. Ich finde es gut, wenn man verschiedene Rechenwege ausprobieren kann.

Це дуже весело. Можна не тільки обчислювати, а й малювати, вимірювати чи зважувати щось. Мені подобається, коли можна спробувати різні способи обчислення чогось.

das wir immer wieder mit noch mehr und noch größeren Zahlen rechnen können.

ми можемо знову і знову обчислювати з все більшими числами.

Die guten Noten, Die schweren Aufgaben (sehr sehr sehr schwer) Beispiel  $373 \cdot 597 = 220443$

Хороші оцінки. Складні завдання (дуже, дуже, дуже, дуже складні, і як  $373 \cdot 5910220443$ )

Є так багато гарних завдань.

das es so viele schöne Aufgaben gibt.

Тому що математика - це круто.

Weil Mathe cool ist



# Висловлення дітей-учасників МОГ

щодо своїх вчителів



Wir finden an Mathematik gut ...

Нам подобається математика...

die Lehrerin. Wir lernen mit Zahlen zu rechnen, damit wir im Leben gut klar kommen.

Вчитель. Ми вчимося рахувати з числами, щоб добре ладнати в житті.

Wir finden an Mathematik gut ...

Нам подобається математика...

Ich habe eine tolle Lehrerin und mir macht Mathematik sehr viel Spaß. Ich lerne viele neue Sachen.

Я був чудовим вчителем, і для мене математика дуже весела. дізнатись багато нового.

Wir möchten an der ZMO-Hirnsportrunde teilnehmen, weil ...

Ми хочемо взяти участь у МОГ -Потяг мізків - Раунд, тому що..

Uns Mathe Spaß macht, weil unsere Klasse recht gut rechnen kann, weil unsere Mathelehrerin uns gut trainiert hat und weil wir es ohne sie gar nicht wüssten.

Нам подобається займатися математикою, тому що в нашому класі досить добре рахувати, тому що вчителька математики нас дуже добре підготувала, і тому що без неї цього б не знали.

Wir finden an Mathematik gut ...

Нам подобається математика...

Das der Lehrer so nett ist, das der Unterricht ein bisschen lustig ist, abwechslungsreich.

... Вчитель такий милий, що заняття трішки веселі й пропонують великі варіації.

Wir finden an Mathematik gut ...

Нам подобається математика...

dass unsere Lehrerin dafür sorgt, dass der Unterricht nie langweilig wird und gibt uns immer neue Aufgaben zum rechnen.

Наша вчителька дбала про те, щоб уроки ніколи не були нудними, і вона завжди дає нам нові завдання для обчислення.



Плекаймо математичні таланти дітей!  
- Збірник олімпіадних завдань -

**А. Вступ**

*У математиці є краса і романтика.  
Математичний світ - це не місце суму.  
Це надзвичайне місце; де варто провести час.  
~ Маркус дю Соуа ~*

Соціальне сприйняття математики та інтерес до неї виходить за рамки простого розуміння її як корисного інструменту для науки та повсякденного життя. Протягом тривалого періоду часу математиці доводилося боротися зі своєю широко поширеною, емоційно високою репутацією як складного і втомливого, але необхідного предмета. Цікаво, що в останні роки відбувається певна зміна думок. Наприклад, Німецьке математичне товариство посилається на репрезентативне дослідження, опубліковане в 2010 році, яке показує, що математика посідає друге місце серед улюблених предметів німецьких учнів п'ятих класів. Крім того, 68% дорослих, опитаних під час цього дослідження, повідомили, що їм подобається мати справу з математичними проблемами в повсякденному житті. Це можна розглядати як ознаку зміни точки зору від упередженого, негативно окресленого мислення, до перегляду математики та насолоди від неї з відкритим і зацікавленим розумом. Оскільки наше місце зустрічі для ранньої математичної освіти є закладом, який протягом останніх десятиліть активно підтримує інтерес дітей до математики та сприяє розвитку математичного мислення, ми дуже задоволені цим прогресом. Крім того, складне та приємне закінчення відображене у висловлюваннях дітей МОГ, які беруть участь у заходах нашого Місяця зустрічі (див. висловлення дітей на початку та в кінці цієї книги). Як і з будь-яким предметом, інтерес до математики, математичної компетенції та приємних занять у цьому відношенні можуть виникнути лише тоді, коли створюються можливості отримати доступ до різноманітного досвіду в рамках предмета, бажано в молодому віці. Окрім фундаментальної бази, ми вважаємо життєво важливим, щоб особливо талановиті діти, а також діти з особливими потребами отримували додаткову увагу та турботу, щоб побудувати міцний фундамент математичних знань та заохочувати подальший розвиток навичок. Особливо розвиток орієнтації в числовому просторі та сильного почуття числової грамотності виявився важливим завданням на ранньому етапі розвитку математичного мислення (2015). Стосовно цього питання, протягом

останніх років (2010, 2013, 2014) на нашому Місці зустрічі було розроблено кілька математичних ігрових світів, які дозволяють вводити математичні поняття у ігровій, орієнтованій на дію манері. Про базову освіту з інформатики див. також Динамічні лабіринти (2016). Незважаючи на те, що наші зусилля в цій сфері втілені в різноманітні засоби, спрямовані на підтримку дітей з особливими освітніми потребами (2003), пропозицій для дітей, особливо талановитих у галузі математики, залишається мало. Щоб допомогти заповнити цю прогалину, ми започаткували Математичну олімпіаду гномів (МОГ) — щорічний конкурс для математично талановитих учнів 3-х класів, де їм надається можливість довести свої здібності та розв'язати складні математичні завдання, змагаючись із іншими талановитими дітьми. У першому році олімпіада була адресована початковій школі міста Оснабрюк. Через велику популярність першого туру в 2001 році, радіус був розширений лише через рік, щоб охопити початкову школу в окрузі, в результаті чого зона охоплення складалася з приблизно 120 початкових шкіл. Разом зі своїм учителем кожен клас-учасник може обрати одну дівчинку та одного хлопчика, як представників класу, щоб довести свій талант на олімпіаді. З 2001 по 2013 рік у ньому взяли участь 2102 дитини, з них 1063 хлопчика та 1039 дівчаток. Ця невелика різниця в кількості виникла через те, що, особливо в перші роки, школи-відправники вважали дівчат менш конкурентоспроможними, тому брали участь лише хлопчики, і жодної дівчинки з класу. З самого початку ми були віддані тому, щоб хлопчики та дівчатка отримували однакові можливості, які, на щастя, з роками ставали все більш і більш реальними для шкіл та дітей (див. також Розділ В. Подальші перспективи). За результатами «Олімпіадного виступу» діти розподіляються на 4 групи за статтю (бронза, срібло, золото, діамант (перші три місця)) та отримують сертифікат, або у випадку першого місця зайнятого хлопчиком і дівчинкою — одного з двох кубків МОГ змагання. На наш погляд, ця позитивна презентація математичної компетенції дітей і задоволення від неї завжди було центральною частиною цього проекту. Отримані наприкінці числені спеціально розроблені математичні задачі та індивідуальні підходи розв'язання дітей-учасників об'єднувалися і збиралися протягом 13 років та стали основою цієї книги. Наміри, пов'язані з цим, різноманітні. По-перше, збірник олімпіадних завдань дає педагогам уявлення про те, як кинути виклик особливо талановитим дітям. По-друге, у книзі продемонстровані взірцеві підходи, які обрали діти під час розв'язання цих завдань. У багатогранній роботі (Schwank, 2016) будуть широко представлені найдивовижніші розв'язки завдань та дитячі ідеї. Особливості, які діти навели для отримання результату, дозволяють глибоко зрозуміти стратегії їх

математичного мислення. Спочатку ця серія була видана німецькою мовою. Тим не менше, може бути цікаво і повчально слідкувати за невеликими словесними математичними починаннями дітей. Окрім того, що ці емпірично різноманітні дані становлять науковий інтерес, і досі існує небагато досліджень щодо тематично обдарованих дітей, ця робота також пропонує практичні підказки щодо того, як мати справу з різними процесами мислення, які діти можуть використовувати в класі або індивідуальному середовищі, щоб сприяти цільовому просуванню. Проект такого масштабу та характеру став успішним завдяки відданій роботі великої кількості людей. Тому ми сердечно дякуємо всім, хто долучився: перш за все, дітям-учасникам та їхнім вчителям за мотивацію та ентузіазм. Крім того, студентам та співробітникам університетів, а також волонтерам за їхню невтомну самовіддану працю. Нарешті, ми хочемо висловити особливу вдячність Stiftung Stahlwerk Georgsmarienhutte, чия фінансова підтримка стала суттєвим внеском в успіх МОГ.

Бажаємо читачам приємної подорожі в математичний світ МОГ. Ми сподіваємося надати нове розуміння можливостей позитивного впливу на розуміння дітьми математичних понять, структур і процесів, відкриваючи можливості для активного вивчення предмета, що, не в останню чергу, веде до подальшого посилення ентузіазму до математики.

*Інге Шванк*

Місце зустрічі «Математичне раннє навчання»

## **Література**

- Kohli, N., Sullivan, A. L., Sadeh, S., & Zopluoglu, C. (2015): Longitudinal mathematics development of students with learning disabilities and students without disabilities: A comparison of linear, quadratic, and piecewise linear mixed effects models. *Journal of school psychology*, 53(2), 105-120.
- Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2003): Mathematics interventions for children with special educational needs a meta-analysis. *Remedial and special education*, 24(2), 97-114.
- Schwank, I. (2018a): Kinder in ihrem mathematischen Talent wertschätzen. Olympische Aufgabenbearbeitungen. Bd. 1-2. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2018b): Dynamische Labyrinth. Erste Schritte in die Informatik für Kinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2013a): 认识\_学的\_戏世界-\_学的逻辑思维是可以学习的. [Insights into Mathematical Playworlds – Mathematical Logical Thinking Wants to be Learned. German-Chinese Reader.] Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2013b): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster & J.-H. Lorenz (Hg.): *Rechenstörungen bei Kindern. – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik.* 93-138. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Schwank, I. & Schwank, E. (2015): Development of mathematical concepts during early childhood across cultures. In Wright, J. D. (Ed.-in-Chief): *The International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences, Second Edition.* 772–784.
- Storeygard, J. (2012): *Count Me In! K-5: Including Learners With Special Needs in Mathematics Classrooms.* Thousand Oaks: Corwin Press.

## **Веб-посилання**

- Deutsche Mathematiker Vereinigung: Thema: Studie, Mathematik ist das Lieblingsfach der Deutschen. Letzter Aufruf: 28. August 2018:  
<https://www.mathematik.de/dmv-blog/65-studie-mathematik-ist-das-lieblingsfach-der-deutschen>

## Б. КОЛЕКЦІЯ ОЛІМПІАДНИХ ЗАВДАНЬ

*У математиці  
мистецтво ставити запитання  
важливіше, ніж розв'язувати.  
(In re mathematica  
ars proponendi quaestionem  
pluris facienda est quam  
solvendi.)  
~ Георг Кантор ~*

Протягом 13 років Центр зустрічі для ранньої математичної освіти запрошував математично обдарованих учнів 3-х класів – по одній дівчинці та одному хлопчику з кожного класу-учасника – взяти участь у раунді «поїзд мозгу» з Математичної олімпіади гномів (МОГ) та пройти цікаві випробування. Математичні проблеми, з багатьма з яких вони, ймовірно, не зіткнулися на звичайних уроках з математики у школі. Досвід перших кількох раундів МОГ показав, що наш критерій відбору – найбільш математично талановиті дівчинка та хлопчик із кожного класу – справді дав вибірку учнів із дуже високими успіхами. Це спостереження узгоджується з нещодавніми висновками, які вказують на те, що вчителі досить успішно, часто навіть краще ніж стандартизовані заходи, виявляють особливо талановитих з точки зору математики дітей серед учнів, якими вони опікуються (Niederer, Irwin, Irwin&Reilly, 2003; Hodge&Kemp, 2006). Тому перед командою нашого Міся зустрічі було поставлено завдання розробити олімпіадні завдання, які, з одного боку, були б досить складними, як «ефект стелі». Це проблема, на яку завжди потрібно звертати увагу, розглядаючи високу обдарованість, незалежно від того, в якій конкретній області (Thompson&Subotnik, 2010; Bortz&Doring, 2014) ведеться робота. З іншого боку, важливою була турбота про те, щоб не перевантажити дітей, які ще знаходяться на стадії розвитку свого математичного мислення, занадто складними завданнями, враховуючи, що однією з важливих завдань МОГ завжди було підвищити задоволення дітей від математики. Тому ми вирішили навмисно включити деякі завдання з низькою вибіркою, щоб усі діти, які беруть участь, мали надихаючий досвід успішного розв'язання хоча б деяких завдань офіційної олімпіади з математики, а також для того, щоб включити достатню кількість завдань з високою вибіркою, щоб мати можливість вірно диференціювати різні рівні математичного таланту серед дітей-учасників. Окрім складності завдань, ми акцентували увагу на включенні широкого кола математичних



тем, не тільки з уроків математики в початковій школі, але й за межами цього освітнього рівня, щоб продемонструвати дітям велику різноманітність математичних проблем і дати можливість зрозуміти стратегії думок, які діти можуть використовувати під час розв'язання різноманітних математичних тем. Завдання, які виходять за межі програми математики початкової школи, були включені для вивчення стратегій, яких діти дотримуються, коли вони ще не засвоїли відповідних підходів. З одного боку, це змушує дітей оволодіти проблемою з їхніми ще обмеженими знаннями про математичний формалізм, наприклад, використання змінних, термінів і рівнянь (за розумінням Kramer 2003, с. 171: формальний математичний запис як підсилювач інтелекту), виключно на основі їх розумового залучення до математичних зв'язків. З іншого боку, було створено кілька завдань, які дозволяли дітям спочатку дослідити один або кілька наведених прикладів, а потім узагальнити зроблені відкриття. Насамкінець, ми хотіли б особливо наголосити, що банк завдань було розроблено не лише для того, щоб представити математичні задачі та знайти правильне розв'язання, але й щоб кожен аркуш із завданням чітко й конкретно вимагав від дітей пояснень думки та наведення підходів та стратегій, які вони використовували або вирішили не використовувати. Це можна реалізувати за допомогою розрахункових малюнків або розмовної вербалізації. Прикладами цього можуть бути: «Простір для ваших думок і відповідей»; «Простір для пояснення»; «Обчисліть»; «Намалюйте або запишіть щось»; «Поясніть свою відповідь»; «Порахуйте, намалюйте або запишіть щось».

На нашу думку, цей процес рефлексії має першочергове значення не лише для того, щоб усвідомити думки дітей, а й для зміцнення та закріплення індивідуального математичного опрацювання шляхом свідомого осмислення математичних операцій та їх функціонування. Результат нашого багаторічного та багатогранного досвіду можна побачити в наступній збірці 13-річних олімпіадних завдань. Для кращого сприйняття завдання відсортовано за темами, замість того, щоб представляти збірку окремих річних раундів.

Насолоджуйтеся читанням!

## **Література**

- Döring, N., & Bortz, J. (2014): *Forschungsmethoden und Evaluation*. Heidelberg: Springer.
- Hefendehl-Hebeker, L.; & Schwank, I. (2015): *Arithmetik: Leitidee Zahl*. In Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. S. 77-115. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Hodge, K. A., & Kemp, C. R. (2006): *Recognition of Giftedness in the Early Years of School: Perspectives of Teachers, Parents, and Children*. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 164-204.
- Krämer, S. (2003): *„Schriftbildlichkeit“ oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift*. In S. Kramer & H. Bredekamp (Hrsg.), *Bild – Schrift – Zahl*. 157–176. München: Wilhelm Fink.
- Niederer, K., Irwin, R. J., Irwin, K. C., & Reilly, I. L. (2003): *Identification of Mathematically Gifted Children in New Zealand*. *High Ability Studies*, 14(1), 71-84.
- Schwank, I. (2005): *Kinder sind keine Taschenrechner*. Interview. *Gehirn & Geist*. 6/05, 34-37
- Thompson, B. E., & Subotnik, R. F. (Eds.) (2010): *Methodologies for Conducting Research on Giftedness*. Washington, DC: American Psychological Association.





Прізвище та ім'я \_\_\_\_\_

Школа \_\_\_\_\_

Клас \_\_\_\_\_

Вік \_\_\_\_\_

Прізвище, ім'я по батькові вчителя з математики

\_\_\_\_\_

**Бажаємо  
успіхів!**



## **Зміст**

<b>1 Уважне обчислення . . . . .</b>	<b>1</b>
Правила додавання та віднімання	
<b>1.1 Як подолати помилки?</b>	
Знаходження, виправлення та пояснення помилок у письмових обчисленнях	
<b>1.2 Арифметичні стратегії</b>	
Обчислення «Дуже раціонально» чи «менш раціонально»	
<b>1.3 Обчислення з невідомими числами</b>	
Застосування відомих правил обчислень до невідомих чисел	
<b>2 Загадки про числа та арифметичні дії з ним. . . . .</b>	<b>11</b>
Завершення обчислень і знаходження числа	
<b>2.1 Знаходження пропущених чисел</b>	
Завершення обчислень шляхом підстановки відповідних значень	
<b>2.2 Пошук відповідних арифметичних операцій</b>	
Завершення обчислень шляхом підстановки. Підстановка арифметичних операцій	
<b>2.3 Загадки з сірниками</b>	
Постановка арифметичних задач із сірниками.	
<b>2.4 Розпізнавання чисел</b>	
Пошук і застосування правил у межах заданих чисел.	
<b>3 Арифметичні закономірності . . . . .</b>	<b>29</b>
Виявлення арифметичних закономірностей у числових рядах і обчислення числових виразів	
<b>3.1 Продовження числових послідовностей</b>	
Виявлення та застосування закономірностей	
<b>3.2 Спеціальні додаткові правила</b>	
Аналіз отримання результатів за спеціальними правилами додавання	
<b>3.3 Спеціальні правила множення</b>	
Дослідження отримання результатів за спеціальними правилами множення	
<b>4 Операції з вибором . . . . .</b>	<b>41</b>
Розглянути усі можливі варіанти, визначити їх кількість або вибрати підходящий	
<b>4.1 Пошук правильного розташування</b>	
Шукаємо єдино можливе розташування відповідно до наданої інформації	
<b>4.2 Шукаємо різні варіанти</b>	
Шукаємо декілька, не всі можливості	
<b>4.3 Пошук усіх варіантів</b>	
Пошук усіх можливих варіантів	

## **Зміст (продовження)**

<b>5</b>	<b>Текстові задачі . . . . .</b>	<b>57</b>
	Опанування задач, сформульованих у текстовій формі з математичної точки зору	
<b>5.1</b>	<b>Логічні стратегії: використання відомих фактів для отримання нових</b>	
	Не все відомо, але математична логіка веде до відповіді	
<b>5.1.1</b>	<b>Для початку: лише одна невідома величина</b>	
<b>5.1.2.</b>	<b>Стає важче: дві невідомі величини</b>	
<b>5.1.3</b>	<b>Важко: три або більше невідомих величин</b>	
<b>5.2</b>	<b>Площа, стежини та відстань</b>	
<b>5.3</b>	<b>Важливість тимчасово переплетених зв'язків</b>	
	Використання тимчасової інформації для з'ясування ситуацій	
<b>5.3.1</b>	<b>Чим більше, тим краще</b>	
<b>5.3.2</b>	<b>Чим більше, тим більше</b>	
<b>5.4</b>	<b>Дільники і кратні</b>	
	Текстові задачі на зв'язки добутоків	
<b>5.5</b>	<b>Що, якщо...</b>	
	Отримання загального уявлення різних сюжетних ліній	
<b>6</b>	<b>Образні моделі . . . . .</b>	<b>87</b>
	Логічне дедуктивне мислення на основі образних закономірностей	
<b>6.1</b>	<b>Розпізнавання та продовження закономірностей</b>	
	Виявлення та застосування закономірностей	
<b>6.2</b>	<b>Багато квадратів і прямокутників</b>	
	Ознайомлення і створення моделей	
<b>6.3</b>	<b>Обчислення площ</b>	
	Визначення та порівняння площ поданих фігур	
<b>6.4</b>	<b>Збільшення масштабу</b>	
	Збільшення фігур на папері квадратної форми	
<b>6.5</b>	<b>Просторова уява</b>	
	Обробка просторових композицій за допомогою планарних ілюстрацій	
<b>6.6</b>	<b>За допомогою ножиць і паперу</b>	
	Вирізання фігурок зі складеного аркуша паперу	
<b>7</b>	<b>Все добре, що добре закінчується . . . . .</b>	<b>109</b>
	Лабіринти та багато іншого	

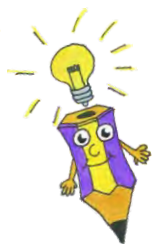
# 1 Уважне обчислення

## Правила додавання та віднімання

1.1 Як подолати помилки? . . . . .	3
Знаходження, виправлення та пояснення помилок у письмових обчисленнях	
1.2 Арифметичні стратегії . . . . .	6
Обчислення «Дуже раціонально» чи «менш раціонально»	
1.3 Обчислення з невідомими числами . . . . .	8
Застосування відомих правил обчислень до невідомих чисел	



1 Обчисли приклад!



$$\begin{array}{r} 384 \\ + 271 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 906 \\ - 371 \\ \hline \end{array}$$

2 Любий друже, Крістін, у тебе помилка!



$$\begin{array}{r} 473 \\ + 364 \\ \hline 109 \end{array}$$

Покажемо Крістину, як обчислювати правильно:

$$\begin{array}{r} 473 \\ + 364 \\ \hline \end{array}$$

Що Крістін зробив не так?

---



---



---

3 Дорога Аню, ти також зробила помилку!



$$\begin{array}{r} 905 \\ - 286 \\ \hline 729 \end{array}$$

Покажемо Ані, як обчислювати правильно:

$$\begin{array}{r} 905 \\ - 286 \\ \hline \end{array}$$

Що не так зробила Аня?

---



---



---



4 Обчислити приклад!



$$\begin{array}{r} 285 \\ + 362 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 807 \\ - 453 \\ \hline \end{array}$$

5 Любий друже, Ченг, у тебе помилка!



$$\begin{array}{r} 374 \\ + 265 \\ \hline 109 \end{array}$$

Покажемо Ченгу,  
як правильно  
обчислювати:

$$\begin{array}{r} 374 \\ + 265 \\ \hline \end{array}$$

Що Ченг обчислив неправильно?

---



---



---

Які ще помилки можливі під час обчислення?

---



---



---



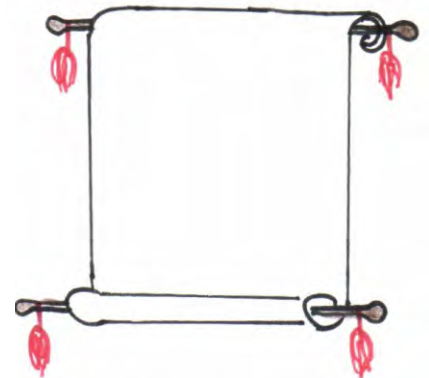
---



---



---



6 Чи був уважним маленький Шелдон у школі?

Він обчислив:

$$\begin{array}{r} 287 \\ + 423 \\ \hline 600 \end{array}$$



Чи вірний результат Шелдона?

---

---

---

Допоможи Шелдону зрозуміти, як обчислювати краще!

На що повинен звертати увагу Шелдон?

---

---

---

① Обчислити раціонально!

$$160 + 58 =$$

$$398 + 212 =$$

$$433 + 428 =$$

Як обчислювати раціонально?



2

Обчислити раціонально!

$$127 + 398 =$$



Обчислити нераціонально!

$$127 + 398 =$$

Як обчислювати раціонально?

---

---

---

---

---

---

Як обчислювати нераціонально?

---

---

---

---

---

---

① Обчислити приклад!

$$\begin{array}{r} 232 \\ + 116 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 575 \\ - 142 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \blacksquare 3 \\ - \blacksquare 8 \blacksquare \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92 \blacksquare \\ - 4 \blacksquare 1 \\ \hline \end{array}$$

$$708$$

$$\blacksquare 43$$

② Спробуйте обчислити приклад!

$$\begin{array}{r} 359210457 \\ + 271653882 \\ \hline \end{array}$$



На що потрібно звернути увагу? Чому це важливо?

---



---



---



---

③ Спробуйте обчислити приклад!

$$\begin{array}{r} 320 \\ - 520 \\ \hline \end{array}$$



На що потрібно звернути увагу? Чому це важливо?

---



---



---

Більше місця для обчислень!





## **2 Загадки про числа та арифметичні дії з ними**

**Завершення обчислень і знаходження числа.**

**2.1 Знаходження пропущених чисел. . . . . 13**

Завершення обчислень шляхом підстановки відповідних значень.

**2.2 Пошук відповідних арифметичних операцій . . . . . 21**

Завершення обчислень шляхом підстановки. Підстановка арифметичних операцій.

**2.3 Загадки з сірниками . . . . . 24**

Постановка арифметичних задач із сірниками.

**2.4 Розпізнавання чисел . . . . . 25**

Пошук і застосування правил у межах заданих чисел.





**3**

Дізнайтеся, яка цифра відповідає кожній літері!

Г	Н	О	М	И

$$Г = Н - 156$$

$$М = И \cdot 3$$

$$Н = М + И$$

$$И = 328 - 286$$

$$Г + Н + О + М + И = 350$$



Для обчислення:

Для обчислення:																	

2 У школі джунглів числові вирази представлені особливим чином. З'ясуйте, яка цифра захована за кожною із тваринок?

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{hippo} & \text{hippo} & \text{frog} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 -
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{rhino} & \text{frog} & \text{lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} \text{duck} & \text{frog} \end{array} \\
 \begin{array}{cc} \square & \square \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{rhino} & \text{duck} & \text{frog} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{rhino} & \text{frog} & \text{lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} \text{hippo} & \text{frog} \end{array} \\
 \begin{array}{cc} \square & \square \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{giraffe} & \text{lion} & \text{lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 -
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{elephant} & \text{lion} & \text{lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{rhino} & \text{lion} & \text{lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}$$

Поясніть, як ви знайшли відповідні цифри!

---



---



---



---



---



---



---



---



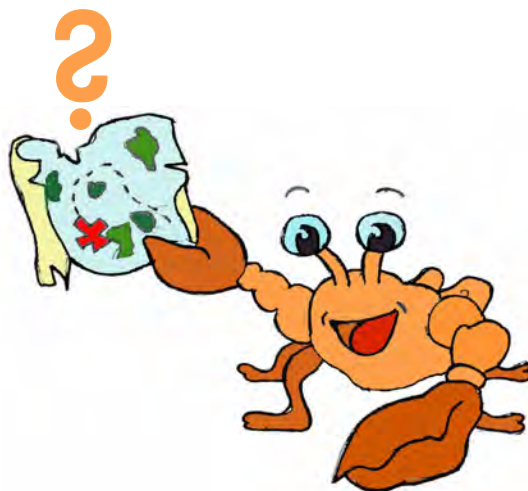
5 У Крабі є карта скарбів.

Ось кілька підказок, як дістатися до скарбу:

$$\heartsuit - \text{шестикутник} = 2$$

$$\heartsuit : \text{трапеція} = 2$$

$$\text{шестикутник} + \heartsuit = 18$$

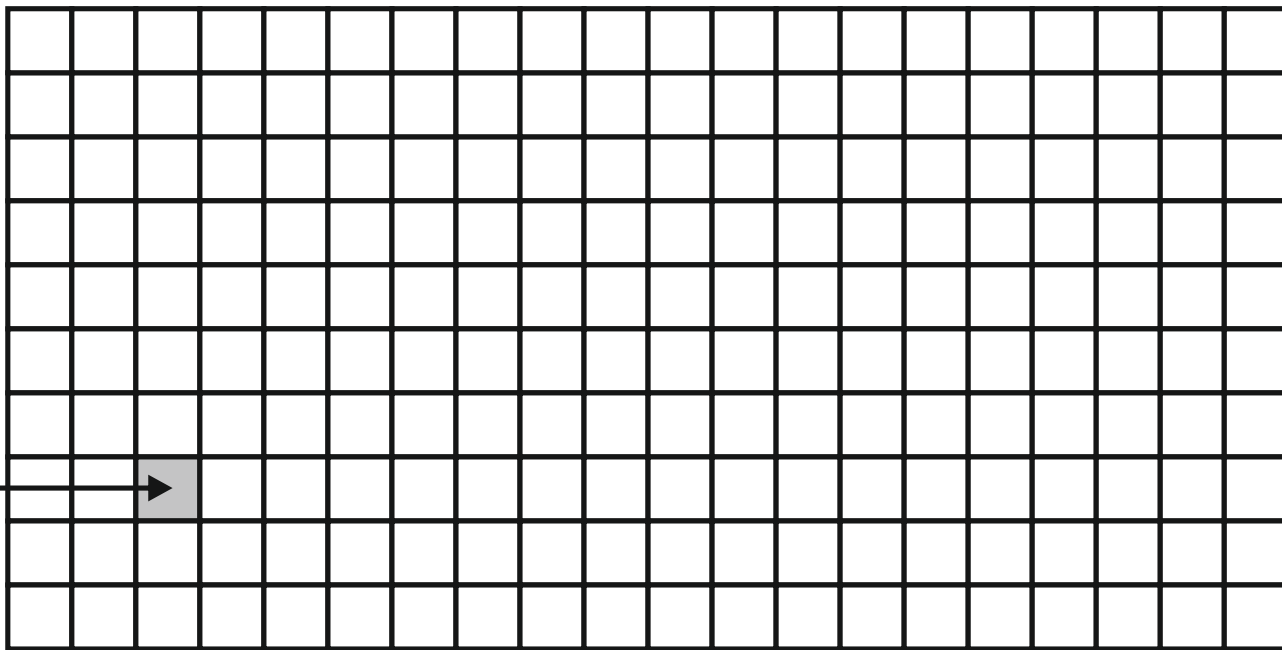


Ось і шлях до скарбу:

від початкової точки пройдіть  $\heartsuit$  кроки вправо,

$\text{трапеція}$  кроки вгору і  $\text{шестикутник}$  кроки вліво.

Намалюйте шлях до скарбу:.



Що необхідно зробити, щоб дістатися до скарбу?

---



---



---





⑥ Макс — винахідник. Він придумав таке завдання:

$$\square \text{ (circle) } + \square \text{ (2) } = \square \text{ (triangle) }$$

$$\square \text{ (circle) } \cdot \square \text{ (2) } = \square \text{ (diamond) }$$

$$\square \text{ (circle) } - \square \text{ (2) } = \square \text{ (square) }$$

$$\square \text{ (circle) } : \square \text{ (2) } = \square \text{ (square) }$$

Макс щось відкрив. Він знайшов число  $\square \text{ (circle) }$  так, щоб сума результатів його обчислень дорівнювала 18.

$$\square \text{ (triangle) } + \square \text{ (square) } + \square \text{ (diamond) } + \square \text{ (square) } = 18$$

Яке число обрав Макс для  $\square \text{ (circle) } ?$  \_\_\_\_\_

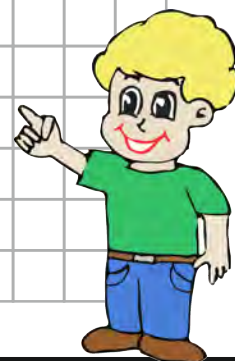
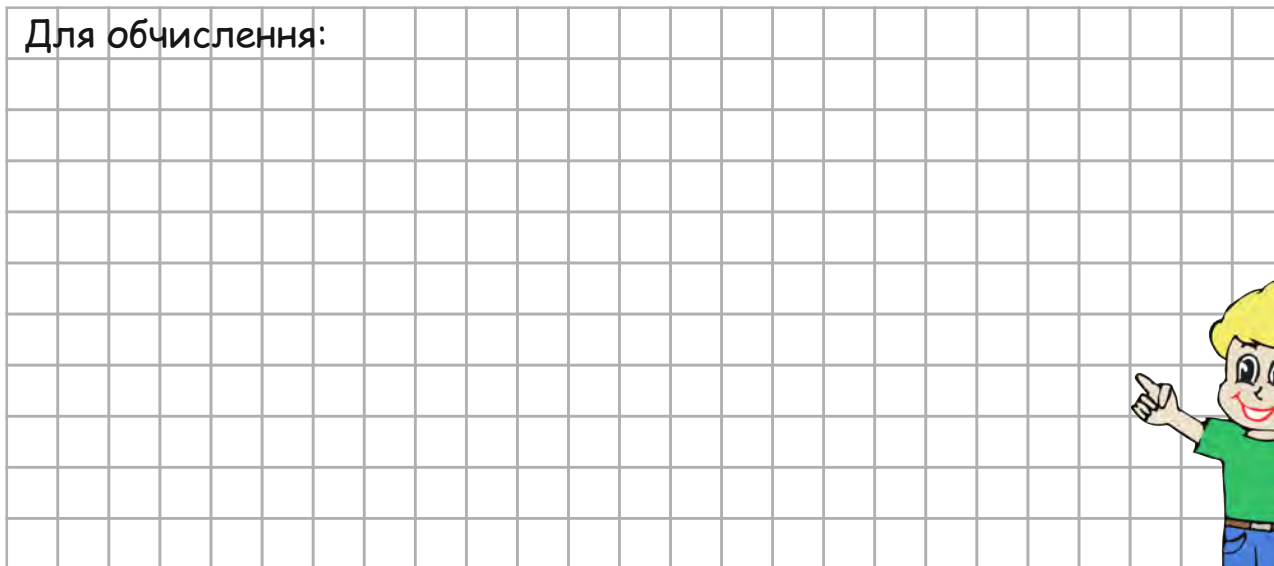
Перебирати всі числа не варто, тому що:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Для обчислення:



**8** Складне числове завдання Тіфані.

Тіфані придумала два числа.

Потім вона записала дію для цих двох чисел.

$$\square - \diamond = 2$$



Які числа могла придумати Тіфані?

Поясніть свою відповідь!

---



---



---

Тіфані додає ще одну дію для двох своїх чисел.

Обидва розрахунки мають бути правильними для її чисел.

Обережно: перш ніж обчислити вираз з відніманням у другому виразі, спочатку потрібно виконати дію множення.

$$\square - \diamond = 2$$

$$\square \cdot \square - \diamond \cdot \diamond = 20$$

Чи можете ви зараз сказати, які саме числа загадала Тіфані?

Поясніть свою відповідь!

---



---



---



---



---

- ① Лілі любить гратися з цифрами. Вона любить рахувати. Сьогодні вона розмірковує: «Як я можу отримати нуль у результаті обчислення?»
- Як ви вважаєте? Поясніть свої думку!




---



---



---



---



---



---



---

Лілі хоче виконати наступне обчислення, використовуючи лише плюс і мінус.

$$\boxed{5} \diamond \boxed{4} \diamond \boxed{3} \diamond \boxed{2} \diamond \boxed{1} \diamond \boxed{=} \boxed{0}$$

Це можливо? Обґрунтуйте свою відповідь!

---



---



---



---



---



---



---



**2** Множення і ділення. Заповніть • і ÷, щоб вирази були правильними.

100		10		10		10	=	10
-----	--	----	--	----	--	----	---	----

72		9		5		4	=	160
----	--	---	--	---	--	---	---	-----



Для обчислення.


Так я знайшов свій результат:

---

---

---

---

---

3 Ева любить створювати математичні дерева. На цій сторінці ви можете побачити її розв'язання для дерева з кінцевим результатом **7**. Вона з'єднає листочки арифметичними знаками або використовує їх для нового числа. Вона продовжує, поки не будуть утворені всі листочки. Гілки не можуть переплітатися, а порядок листочків не можна змінювати. Спробуйте самі з іншими деревами. Дерево з кінцевим результатом **3** - дуже легко!

1 2 3 4 5 6

1+2=3

34

3+34=37

37+5=42

42:6= **7**

1 2

3

1 2 3

4

1 2 3 4

5

1 2 3 4 5

6

① Мері любить грати сірниками. Вона викладає такий вираз:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array}$$



Мері помічає: «Якщо я зміню позицію лише одного сірника, я отримаю новий правильний результат.»

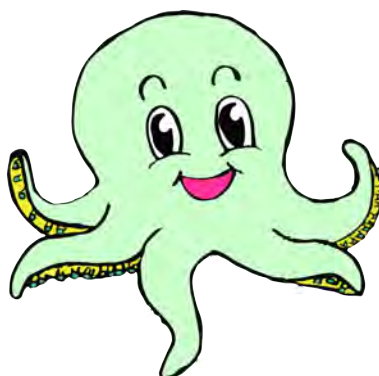
Зобразьте новий вираз Мері!

1

Кракі любить гратися з цифрами.

Сьогодні вона написала цифри на мушлях і поклала ці мушлі на дно моря.

2	3	5
5	1	4
3	6	1



Кладучи мушлі на пісок, Кракі мала щось на думці. Що це могло бути? Яким правилом вона могла скористатися?

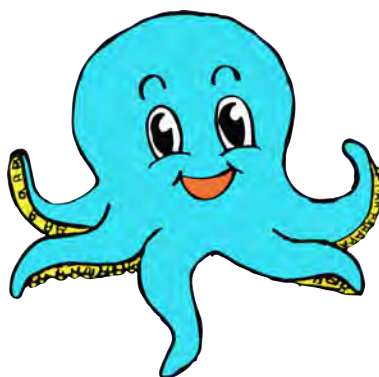
---



---

Друг Кракі також викладає свій варіант виразу.

1	2	6
5	4	0
3	3	3



Він стверджує: «Мое правило підходить до обох варіантів».

Чи правий друг Кракі? Чи є правило, яке підходить для обох варіантів?

---



---



---



---



2

Алекс, Бен, Кріс, Ден та Еліас живуть у країні Алі.  
 Цього тижня вони хочуть прикрасити свої будинки цифрами.  
 Алекс, Бен і Кріс вже закінчили.  
 Вставте цифри для Дена та Еліаса.



Алекс	Бен	Кріс	Ден	Еліас
1	6	2		
4   3	7   1	8   6	14   2	
7	8	14		

Яке правило могли використати хлопці для прикрашання будинків цифрами? Можливі кілька варіантів!

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



Додаткове місце для обчислень.

### **3 Арифметичні закономірності.**

Виявлення арифметичних закономірностей у  
числових рядах і обчислення числових виразів.

**3.1 Продовження числових послідовностей . . . . . 31**  
Виявлення та застосування закономірностей

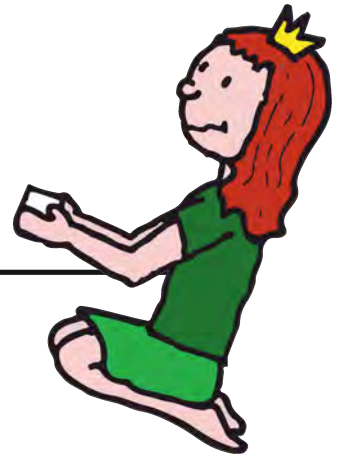
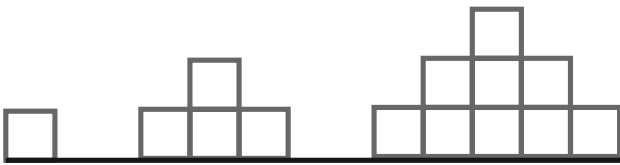
**3.2 Спеціальні додаткові правила . . . . . 35**  
Аналіз отримання результатів за  
спеціальними правилами додавання

**3.3 Спеціальні правила множення . . . . . 37**  
Дослідження отримання результатів  
за спеціальними правилами множення



1 Принцеса Міа любить грати з плиточками та виконувати арифметичні комбінації.

Сьогодні вона кладе ряд плиточок так:



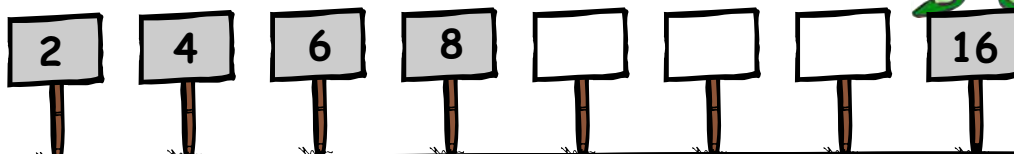
Як триває процес далі?

Як могла розмірковувати Міа?

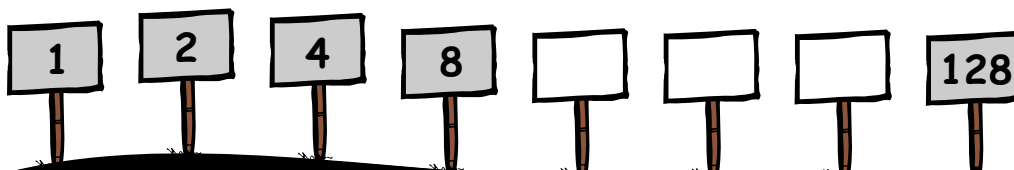
2

Відьма казкової країни зачарувала деякі числа.

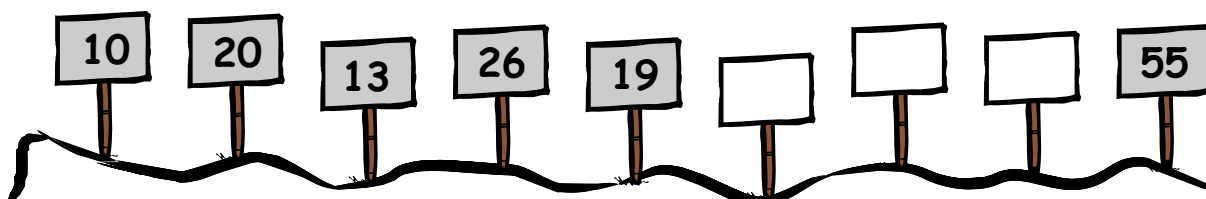
Допоможіть мешканцям казкової країни відновити свої гарні вирази!



Уважно подумайте і напишіть числа в порожні клітини! Чому ваші числа підходять?



Уважно подумайте і напишіть числа в порожні клітини! Чому ваші числа підходять?



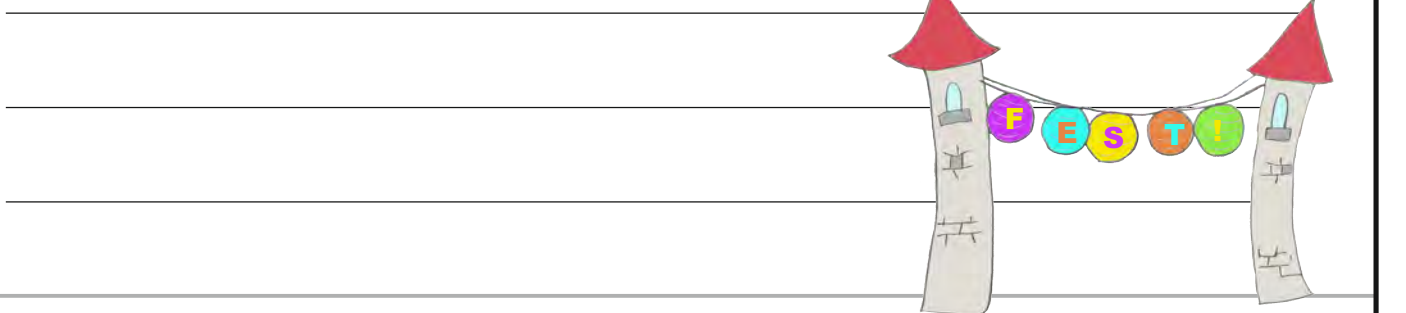
Уважно подумайте і напишіть числа в порожні клітини! Чому ваші числа підходять?

3 Діти замку люблять цифри.

Продовжіть ряд першої гірлянди.



Знайти наступні числа легко, тому що:



Продовжіть ряд другої гірлянди:



Знайти наступні числа легко, тому що:

---



---



---

Продовжіть ряд третьої гірлянди:



Знайти наступні числа легко, тому що:

---



---



---



4

Ліза любить числа. Їй подобається писати їх рядками. Продовжуйте!

Перший ряд Лізи:

4, 8, 12, 16, , ,

Ліза думає: я можу легко обчислити наступне значення, тому що:

---

---

Другий ряд Лізи:

2, 4, 8, 16, , ,

Ліза думає: я можу легко обчислити наступне значення, тому що:

---

---

Третій ряд Лізи:

1, 4, 9, 16, , ,

Ліза думає: я можу легко обчислити наступне значення, тому що:

---

---

Ліза розмірковує: 4 і 16 з'являються у всіх трьох рядках

Чи є інші числа в усіх трьох рядках?

Які це числа?

---

---

---

---

---

---



**2** Тем хоче застосувати спеціальні правила додавання.  
Вона починає з того, що пише **42** як своє перше число.  
Потім вона міняє цифри і пише: **24**.  
Вона додає ці два числа: **42+24**.  
У результаті вона отримує:



Тем знову пише число: **53**.  
Потім вона змінює місцями цифри і пише: **35**.  
І знову додає два числа: **53+35**.  
Результатом обчислень є :

Чим особливі результати Тем?

---

---

---

Тем розмірковує: Якщо я почну з будь-якого іншого числа від **10 до 99**, чи завжди я отримаю особливий результат зі своєю додатковою властивістю? Що ви думаєте?

Трохи місця для ваших думок і відповідей:

①

Обчислити:

$2 \cdot 3 =$

$1 \cdot 4 =$

$3 \cdot 4 =$

$2 \cdot 5 =$

$4 \cdot 5 =$

$3 \cdot 6 =$

Продовження:

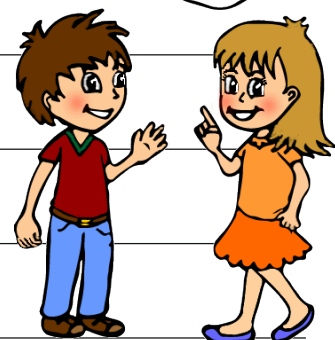
Що ви помітили?

Іві знає, що значенням виразу  $27 \cdot 28$  буде 756.  
Фінлі радіє. Він знайшов значення виразу  $26 \cdot 29$ .

Як Фінлі обчислив? Чому він радіє?

$26 \cdot 29$

$27 \cdot 28$



① Лара придумала кілька числових виразів. Розв'яжіть їх.

$$2 + 3 + 4 =$$

$$4 + 5 + 6 =$$

$$6 + 7 + 8 =$$

$$2 \ 1 + 2 \ 2 + 2 \ 3 =$$



Лара придумала дуже особливі числові вирази.

Як вона обирала свої числа?

---



---



---

Лара помічає, що результати її виразів з числами дуже особливі. Що особливого в її результатах?

---



---

Чому числа результатів стають такими особливими? Чи працює це з великою кількістю цих числових виразів?

---



---



---



---



---



---

2

Улюблені числа Марті: 4, 9, 16, 25, 36, ...

Чим особливі улюблені Числа Марті?

---



---

Напишіть ще три улюблені числа Марті:



Марті часто хоче використовувати свої улюблені числа. Коли він повинен обчислити  $3 \cdot 5$ , він замість цього обчислює  $4 \cdot 4$  і віднімає 1 з результату. Обчислюй, як Марті, і продовжуй заповнювати таблицю!

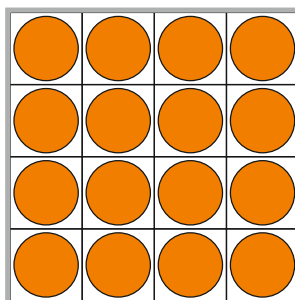
Завдання	Метод обчислення Марті		Результат
$3 \cdot 5$	$4 \cdot 4 = 16$	$16 - 1 = \square$	$3 \cdot 5 = \square$
$4 \cdot 6$	$5 \cdot 5 = \square$	$\square - 1 = \square$	$4 \cdot 6 = \square$
$7 \cdot 9$	$\square \cdot \square = \square$	$\square - 1 = \square$	$7 \cdot 9 = \square$

Чому метод Марті завжди приводить до правильного результату? Ви можете продемонструвати свої думки іншими методами: на числовому ряді або на ланцюгу обчислень, або за допомогою моделі масиву. Робіть як хочете!

Трохи місця для ваших думок і відповідей:

3 Катон особливо любить обчислення з візерунками.

Він вважає цей шаблон чудовим:



Катон пояснює: «Візерунок заважає мені. У шаблоні я бачу, що  $4 \cdot 4$  — це те саме, що  $3 \cdot 5 + 1$ ».

Чи правильний метод обчислення Катона? Поясніть!

---



---



---

Катон пишається: «З моїм трюком із шаблоном я можу дуже добре використовувати сусідні числа для обчислень». Запишіть числові вирази з сусідніми числами так само, як Катон.

$$3 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6 \cdot 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Чи може Катон використати свій шаблонний прийом для всіх виразів на множення з двома однаковими числами та їхніми сусідами?

Поясніть! Ви також можете щось зобразити.



## **4 Операції з вибором**

Розглянути усі можливі варіанти,  
визначити їх кількість або вибрати  
підходящий

<b>4.1 Пошук правильного розташування . . . . .</b>	<b>43</b>
Шукаємо єдино можливе розташування відповідно до наданої інформації	
<b>4.2 Шукаємо різні варіанти. . . . .</b>	<b>49</b>
Шукаємо декілька, не всі можливості	
<b>4.3 Пошук усіх варіантів . . . . .</b>	<b>50</b>
Пошук усіх можливих варіантів	





**1** Перед тим, як почати малювати, художниця Петі любить готувати плани.

Для нової картини вона обрала блакитний, червоний та жовтий кольори.  
Закінчіть її візерунок!

б	ж	
ч	б	
ж	ч	

б: блакитний

ч: червоний

ж: жовтий



Чому спосіб, яким ви закінчили візерунок, підходить?

---



---



---

Петі винаходить інший візерунок з четвертим кольором.

б	з		
ч	б		
ж	ч		
з	ж		←

б: блакитний з: зелений

ч: червоний

ж: жовтий

Петі задається питанням, які можливості у неї можуть бути, щоб продовжити таблицю. Дайте їй підказку! Який колір вписується в поле, на яке вказує стрілочка? Поясніть свою відповідь!

---



---



---



---

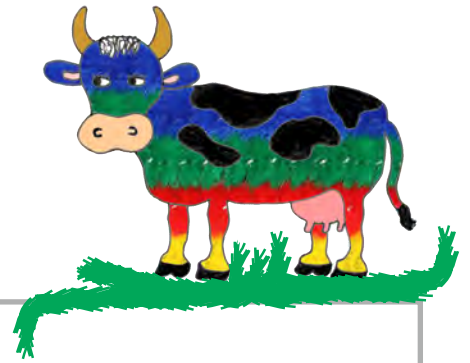
2 Сьогодні фермер Колін зважує своїх корів. Він зазначає:

Люсі легша за Еріку.

Гаріет важить на 5 кг більше, ніж Глорія.

Еріка важить на 3 кг більше, ніж Глорія.

Глорія важить менше Люсі.



Розташуйте корів відповідно до їх ваги.  
Напишіть або намалюйте свій результат.

Яка корова найлегша? \_\_\_\_\_

Яка корова найважча? \_\_\_\_\_

3

Френк, Оуен, Яків, Тіна, Єва і Лілі — друзі. Сьогодні вони разом їдуть в автобусі. На щастя, вони знайшли собі три подвійні місця.



Френк сидить перед Тіною та позаду Оуена.

Яків сидить поруч із Тіною.

Лілі сидить поруч з Оуеном і перед Яковом.

Дізнайтеся, з ким саме можуть сидіти Поруч діти в автобусі. Якщо ви хочете, то можете розмістити їх у полях з місцями нижче. Після цього запишіть своє розв'язання!

### Для розміщення

### Для написання

Сидіння	Сидіння
Сидіння	Сидіння
Сидіння	Сидіння

Сидіння	Сидіння
Сидіння	Сидіння
Сидіння	Сидіння

Опишіть, хто сидить поруч і позаду Єви.  
Поясніть свою відповідь.

---

---

---

---

---

---

---

4 Знову поштар Каспер доставляє листи до монастиря.

Що саме він пам'ятає про поселення:

Йосип живе зліва від Симона.

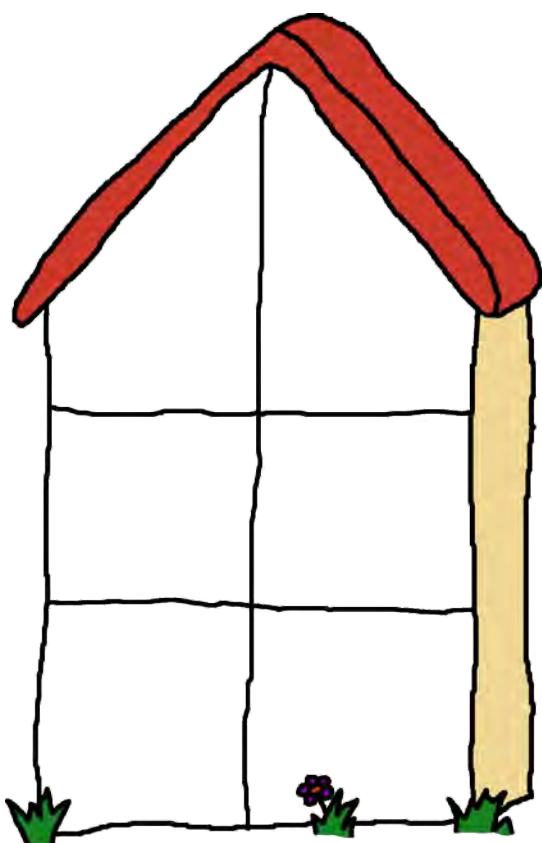
Аарон живе праворуч від Фреді.

Джозеф живе вище за Фреді.

Саймон живе нижче від Мартін.

Ні Мартін, ні Йосип не живуть на правій стороні.

На жаль, він нічого не пам'ятає про Браяна.



Допоможіть поштарю і заповніть імена в будинку!

Де живе Браян? Поясніть!

---



---



---



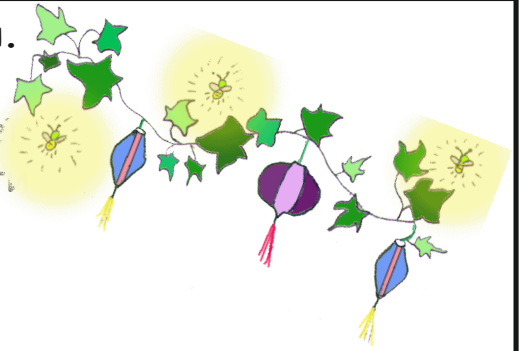
---



---

5 Фея Фіона влаштовує вечірку зі своїми друзями.

Усі вони сидять за круглим столом. Сама Фіона сидить між Бекі та Ені. Лаврі сидить навпроти неї. Грейс сидить зліва від Лаврі. Ені сидить навпроти Грейс. Мейзі залишилося одне місце. Де вона сидить?



---

---

Трохи місця для ваших пояснень.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

6

У Маленького Мері є три капелюхи:

фетровий, солом'яний і шкіряний.

Один капелюх червоний, один капелюх синій,  
один капелюх зелений.

Один капелюх має одне перо, один капелюх з  
двома пір'їнками, а один капелюх – з трьома  
пір'їнками.

Загадка про капелюхи від Мері для вас:

- Мій капелюх з однією пір'їнкою не зелений.
- Мій фетровий капелюх не червоний і має на одне перо менше, ніж шкіряний капелюх.
- Мій блакитний капелюх з трьома пір'їнками.
- У моєму шкіряному капелюсі немає двох пір'їнок.

Дізнайтеся, якого кольору кожен капелюх!

Дізнайтеся, скільки пір'їнок прикрашає кожен капелюшок!

Поясніть свої відповіді! Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.



1

Бенджамін хоче купити собі морозива за 1,71 €. У його гаманці є різні монети:

три монети по 1 €,  
 три монети по 50 центів,  
 три монети по 20 центів,  
 три монети по 10 центів,  
 три монети по 5 центів,  
 три монети по 2 центи.



Назвіть п'ять **різних** варіантів, щоб Бенджамін заплатив за морозиво точною сумою грошей. Використання одних і тих самих монет лише в іншому порядку не зараховується.

1-й варіант: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

2-й варіант: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3-й варіант: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

4-й варіант: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

5-й варіант: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

В чому полягав ваш підхід пошуку розв'язання?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_















① Петтер нудьгує. Він кидає два кубики і підраховує очки.

Перший раз кидає   . додає 8 балів.

Яку найменшу кількість очок можна отримати за 2 кубики? \_\_\_\_\_

Яку найбільшу кількість очок можна отримати за 2 кубики? \_\_\_\_\_

Заповніть таблицю всіма можливими сумами балів:

						
	2	3				
	3					
						
						
						
						

Пітер продовжує кидати кубики дуже довго. Загалом він кидає їх понад 1000 разів! Якої кількості очок він, ймовірно, досягав найчастіше? Поясніть свою відповідь!

---



---



---



---

- 2 У другій половині дня проводиться вистава з песиками Арі, Бла та Кос. Спочатку кожен із них сидить на одній із трьох різних коробок.



Тід час вистави їхнє завдання - міняти місця знову і знову по-новому. Звичайно, це працює лише деякий час. Які різні варіанти є для Арі, Бла та Коса, щоб вибрати коробку?

Як Арі, Бла і Кос можуть сидіти:

Загалом, Арі, Бла і Кос мають \_\_\_\_\_ різних варіантів.

Що потрібно зберегти, щоб знайти всі варіанти?

---



---



---



---



---

3

Кім і Кен винаходять нові слова. Ці слова мають 4 літери і пишуться лише з буквами **a, e, n і g**. Остання буква завжди - це **n** або **g**, і кожна літера з'являється лише один раз у кожному слові. Кім починає і пише: **aeng**.

Кен каже: "Ми зможемо винайти багато-багато слів!  
Звичайно, більше 100".

Дізнайся, скільки насправді слів!  
Запишіть усі можливі слова!



Є \_\_\_\_\_ можливих слів.

Поясніть, чому Кім і Кен не можуть винайти багато слів,  
використовуючи свої правила.

---



---



---



---



---

**4** У русалки Ніксі гардероб повний стрічок.

У неї є стрічки п'яти різних кольорів:

червоний, синій, зелений, помаранчевий та фіолетовий.

Щодня вона носить три стрічки трьох різних кольорів.

Скільки різних нарядів вона може зібрати?



Тоясніть свою відповідь! Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

5

Гном Баку задається питанням, що він може одягнути на вечірку.

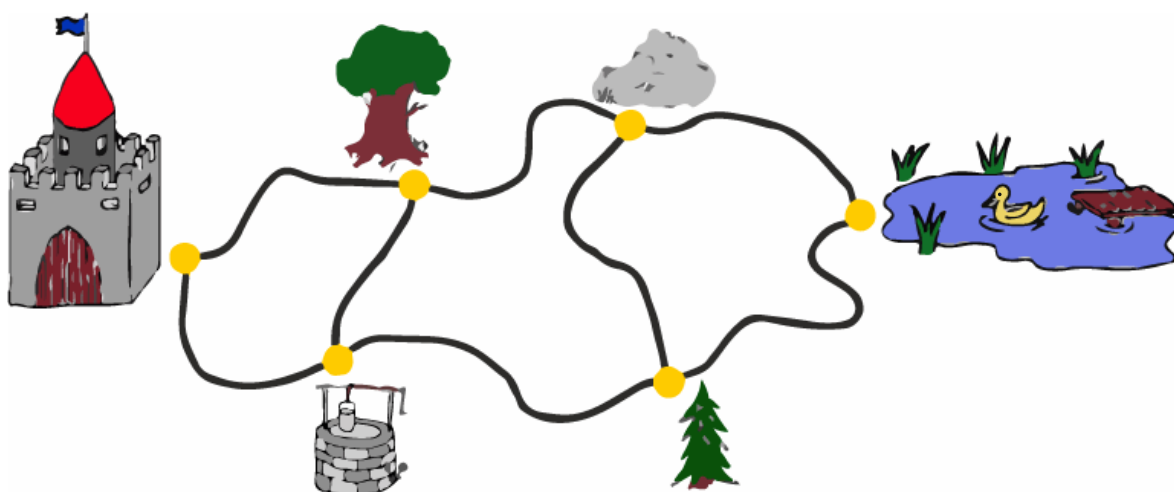
У нього чотири різні светри, одна пара червоних, одна пара синіх і одна пара жовтих штанів, а також два різні гострокінцеві капелюхи.

Гном Баку неодмінно хоче вдягти один светр, одну пару штанів і один гострокутний капелюх. Для цього у нього є багато варіантів. Скільки їх саме?



Поясніть свою відповідь! Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

- 6 Чарівний принц любить їздити різними стежками.  
У нього є кілька варіантів дістатися від замку до озера.



Чарівний принц задається питанням:  
скільки у мене є варіантів проїхатися від замку до озера? Я не хочу  
використовувати жодну ділянку шляху двічі під час їзди.

У Чарівного принца є \_\_\_\_\_ варіантів.

Поясніть свою відповідь!

Ви можете використовувати малюнок із контурами для свого пояснення.

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



## **5 Текстові задачі**

### **Опанування задач, сформульованих у текстовій формі з математичної точки зору**

#### **5.1 Логічні стратегії:**

**використання відомих фактів для отримання нових . . . . . 59**  
Не все відомо, але математична логіка веде до відповіді

**5.1.1 Для початку: лише одна невідома величина . . . . . 59**

**5.1.2 Стає важче: дві невідомі величини . . . . . 62**

**5.1.3 Важко: три або більше невідомих величин . . . . . 68**

**5.2 Площа, стежини та відстань . . . . . 73**

**5.3 Важливість тимчасово переплетених зв'язків . . . . . 78**  
Використання тимчасової інформації для з'ясування ситуацій

**5.3.1 Чим більше, тим краще . . . . . 78**

**5.3.2 Чим більше, тим більше . . . . . 81**

**5.4 Дільники і кратні . . . . . 82**  
Текстові задачі на зв'язки добутків

**5.5 Що, якщо . . . . . 82**  
Отримання загального уявлення різних сюжетних ліній







- 2 Кожен день Лізі годує свого Бембі однаковою кількістю печива.  
Протягом п'яти днів Лізі потребує 30 штук печива.  
Скільки печива знадобиться, щоб годувати Бембі два дні?

Відповідь: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



Розв'язання!

Ви можете обчислювати, малювати або писати.

3

На великому дереві в джунглях сидить багато птахів разом зі своїм ватажком Логі. На сусідньому дереві сидять два шимпанзе Па і Пу. Па і Пу кличуть птахів: «Привіт вам, 200 птахів!» Логі відповідає: «Нас не так багато. Але якщо додати до нас подвійне наше число і також вас двох додати, то нас буде 200 на цьому дереві».

Скільки птахів сидить на дереві? \_\_\_\_\_



Трохи місця для ваших думок.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

1 Скільки років двом гоблінам?



Вік:  років

Нам разом 40 років.

Я старший за тебе на 30 років!



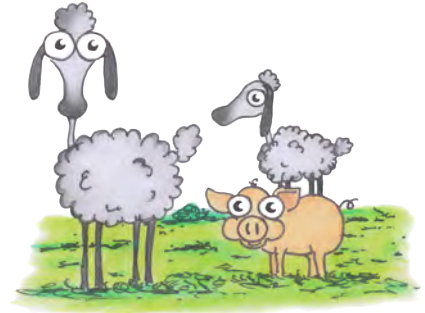
Вік:  років

Тояснить свою відповідь!  
Ви можете обчислювати, малювати і писати.

- 2 У Тоні є вівці і свині. У його сестри Мері також є вівці та свині. Разом у них є 30 тварин. Френк підходить і каже: «Це цікаво. У Мері стільки тварин, скільки ніг у тварин Тоні».

Скільки тварин у Тоні? \_\_\_\_\_

Скільки тварин у Мері? \_\_\_\_\_



Трохи місця для ваших думок.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

- 3 Фермер продає п'ять овець своїй сусідці.  
За кожну буру вівцю він отримує 105 євро.  
За кожну білу вівцю - на 15 євро більше.  
Сусідка дає йому 570 євро за п'ять овець.

Скільки продав фермер білих овець?

---



Трохи місця для ваших думок.  
Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

**4** У готелі «Школа риб» 32 номери та 57 спальних місця.

У номері є або два ліжка, або лише одне ліжко.

Скільки може бути номерів з одним ліжком? \_\_\_\_\_

Скільки може бути номерів з двома ліжками? \_\_\_\_\_

Трохи місця для ваших думок.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.



Номер з одним ліжком коштує 25 євро за ніч.

Номер з двома ліжками коштує 30 євро за ніч.

Сім'я та друзі Фісі платять 305 євро за ніч.

Скільки номерів з одним ліжком вони можуть забронювати? \_\_\_\_\_

Скільки номерів з двома ліжками вони можуть забронювати? \_\_\_\_\_

Трохи місця для ваших думок. Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.



5

Джолі хоче продати кокоси на ринку.

Треjder любить обчислювати.

Вона виставила два цінники:

6 світлих і 8 чорних кокосів коштують 18 євро.

9 світлих і 4 темних кокоси коштують 15 євро.

У Джолі зовсім небагато грошей.

Вона може купити тільки 1 світлий і 1 темний кокос.

Скільки вона має заплатити?



Джолі має заплатити \_\_\_\_\_ євро.

Трохи місця для ваших думок.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

6

На святі Фея Нора купує собі та своїм помічникам дві смажені ковбаски та шість склянок яблуневого соку.

Загалом вона платить 12,60 євро.

Дві смажені ковбаски коштують рівно стільки, скільки три склянки яблуневого соку.



Скільки коштує одна смажена ковбаска? \_\_\_\_\_

Скільки коштує одна склянка яблуневого соку? \_\_\_\_\_

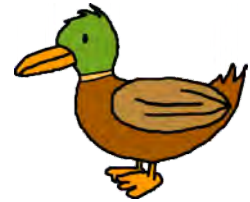
Трохи місця для ваших думок.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

1



Кролик в ящику важить 4 кг.  
Качка в цьому ж ящику важить 5 кг.  
Разом качка і кролик важать 3 кг.  
Скільки важить ящик?



Відповідь: \_\_\_\_\_

Трохи місця для ваших думок.  
Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

2 Дівчина з замку Айві любить тривалі піші прогулянки.

Минулого тижня вона подолала загальну дистанцію 48 км за три дні.

У середу вона пройшла вдвічі більше, ніж у понеділок.

У п'ятницю вона пройшла втричі більше, ніж у понеділок.

Яку відстань вона подолала у відповідні дні?

Понеділок: \_\_\_\_\_

Середа: \_\_\_\_\_

П'ятниця: \_\_\_\_\_



Поясніть свою відповідь! Ви можете обчислювати, малювати і писати.

3 Ута описує:

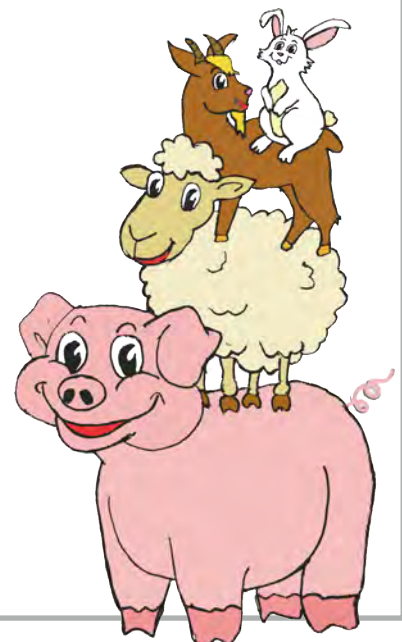
«На моїй дачній фермі водяться різні види тварин. Всього 104 тварини. Кількість овець і свиней однакова. Кроликів на два більше, ніж кіз. Свиней на одну менше, ніж кіз».

Скільки овець, свиней, кроликів і кіз у Ути?

---

---

Трохи місця для ваших думок.  
Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.



4

Сьогодні кухар купує фрукти: один мішок яблук, один мішок груш і один мішок апельсинів. Один мішок яблук коштує стільки ж, скільки один мішок груш. Один мішок апельсинів коштує на 10 талерів більше, ніж два мішки яблук. Загалом він має заплатити 26 талерів.

Скільки коштує один мішок апельсинів?

За один мішок апельсинів їй доведеться заплатити \_\_\_\_\_



Поясніть свою відповідь! Ви можете обчислювати, малювати і писати.



- 1 Ділянку землі хочуть відділити новим парканом. Довжина земельної ділянки 84 м, ширина 60 м. Для двох однакових воріт потрібно залишити вільне місце. Одні ворота мають ширину 4 м.



Скільки метрів матеріалу потрібно для огорожі?

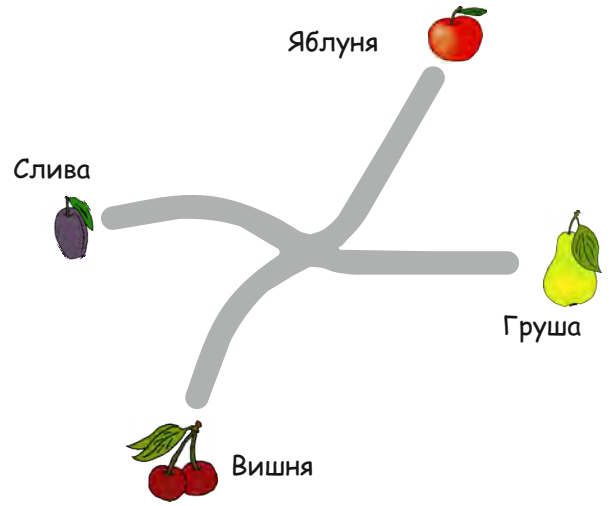
---

Трохи місця для ваших думок.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.



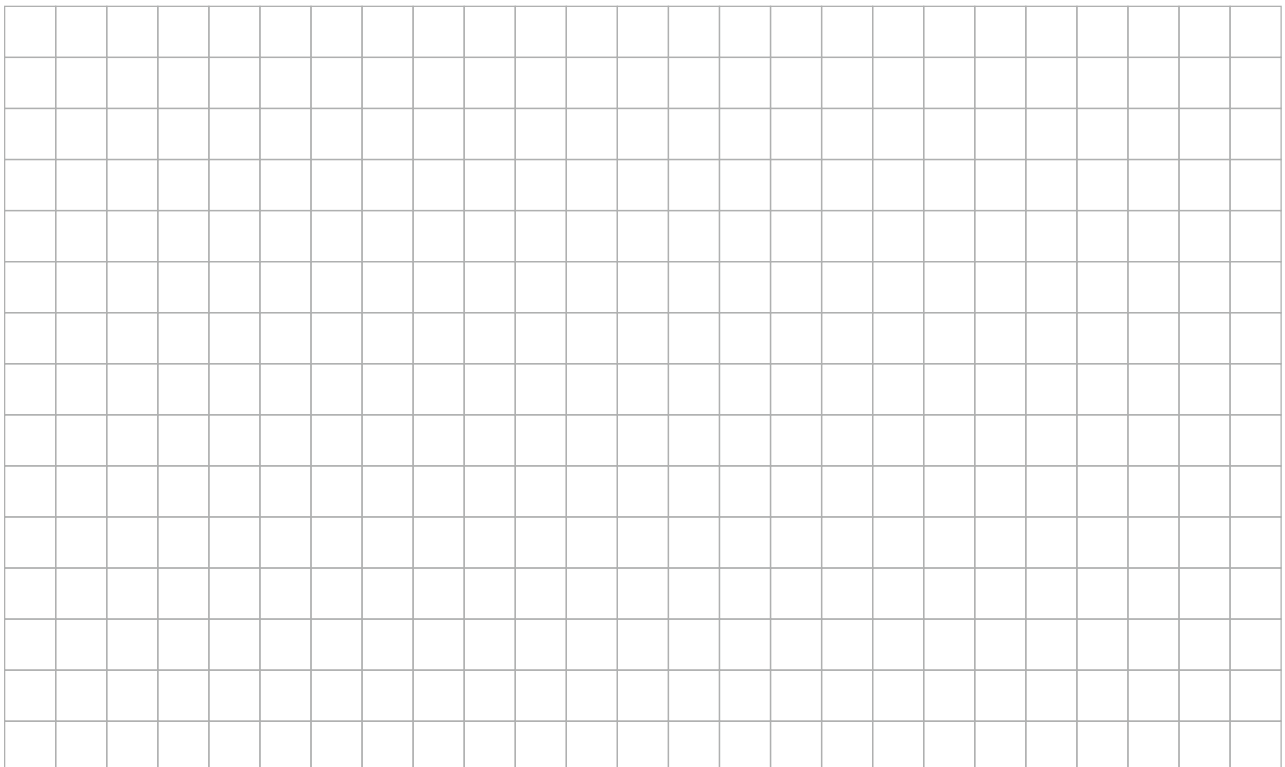
**2** Бабуся Лавр посадила у своєму саду 4 дерева. Між ними є кілька стежин. Щовечора вона гуляє цими стежками. Вона йде від яблуні до груші, це 10 м. Вона продовжує йти від груші до вишні, це 6 м. Далі вона переходить від вишні до сливи, це 14 м. Згодом вона переходить від сливи до яблуні.



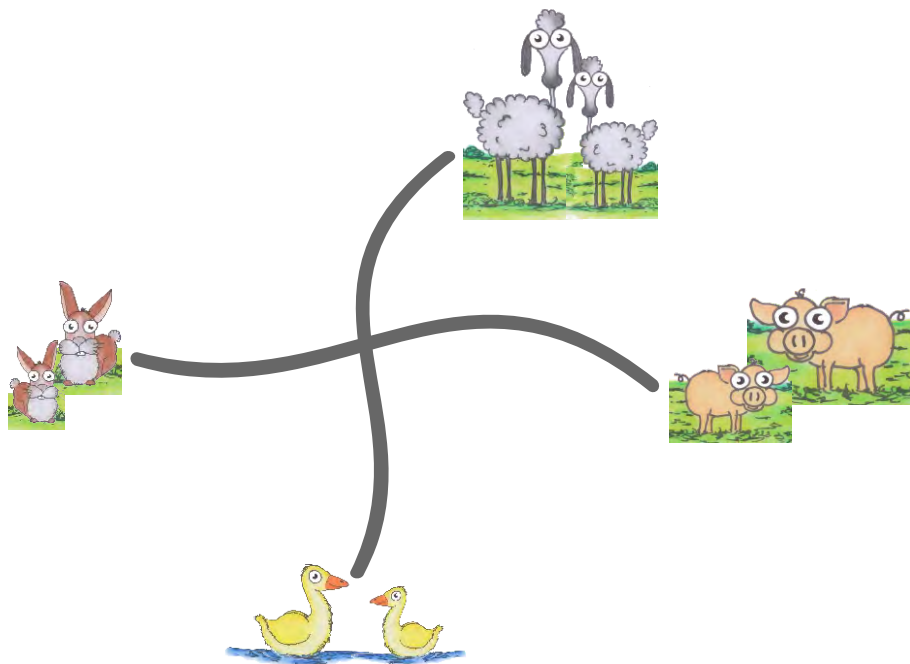
Бабуся Лавр думає: «Йти від сливи до яблуні довше, ніж від груші до вишні». Вона права?

Пояснить! \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Якщо йти прямо від сливи до яблуні, скільки метрів подолає бабуся Лавр? Обчислити.



- 3 Близнюки Тіна і Зіна готуються до спортивного свята.  
Вони зробили ескіз свого маршруту.



Тіна пропонує: «Починаємо з кроликів і біжемо 120 м до овець. Потім біжемо 140 м. до свиней. Потім 100 м до качок і, нарешті, повертаємося до кроликів». Зіна погоджується: «Відмінно, тоді останній відрізок найкоротший».

Чи права Зіна? Скільки триває шлях від качок до кроликів?

Поясніть свою відповідь! Ви також можете використати ескіз.

---



---



---



---



---



---



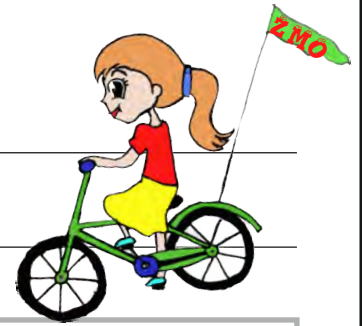
---



---

4

Майкл і Пансі ходять в одну школу. Майкл живе за 3 км від школи, Пансі за 4 км. Після обіду Пансі хоче поїхати на велосипеді до Майкла. Яка відстань може бути? Є декілька варіантів.



Добре подумай і намалюй:

Ось як я знайшов свій результат:

---

---

---

---

- 5 Сью і Ларі друзі. Вони ходять до однієї початкової школи. Сью живе за 2 км від школи, Ларі — за 3 км. Вдень вони часто зустрічаються. Сьогодні Ларі хоче з'їздити на велосипеді від свого дому до будинку Сью. Він обирає найкоротший шлях. Який завдовжки може бути його шлях? Обережно: є кілька варіантів.



Трохи місця для ваших думок і відповідей:

Чому існує так багато можливостей знаходження найкоротшого маршруту Ларі?

---

---

---

---

---

- ① Морський коник Турбо-Фред хоче відвідати водяного Макса. Зараз 10 годин, а Турбо-Фреду ще 20 метрів потрібно допливти.

Він думає: «Мені потрібно 14 хвилин, щоб пропливти 2 м. Перерви у мене більше не буде. Тому я прибуду о \_\_\_\_\_ годині». Поясніть свою відповідь. Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.



Насправді він зустрічається з Максом раніше, тому що Макс виїжджає о 10 годині, щоб зустріти його по дорозі. Макс може пропливти 3 м за 14 хвилин.

О котрій годині вони зустрінуться? \_\_\_\_\_

Поясніть свою відповідь. Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

- 2** Гноми Геві, Гефу і Гезе хочуть загорнути подарунки для своєї вечірки.  
Геві вдається загорнути чотири подарунки за годину.  
Гефу вдається загорнути п'ять подарунків за годину.  
Гезе вдається загорнути шість подарунків за годину.

Сьогодні Геві таємно встав раніше. Він уже запакував вісім подарунків, коли Гефу і Гезе також почали загортати.

**Гефу хвалиться:** «Я наздожену Геві за дві години!»

**Гезе відповідає:** «Ні, я наздожену Геві за дві години!»

Що ти думаєш?

Коли Гефу наздожене Геві, а коли - Гезе?

---

---

Трохи місця для ваших думок.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.



3

**Алі, Беа і Серо виготовляють тарілки з глини.**

Алі може виготовити 4 тарілки на годину.

Беа може виготовити 5 тарілок на годину.

Серо може виготовити 6 тарілок на годину.

Сьогодні Алі таємно встав раніше. Він уже виготовив 8 тарілок, коли Беа і Серо почали свою роботу.



**Беа хвалиться:** «Через дві години я вас наздожену!»

**Серо суперечить:** «Цього не може бути! Все одно я першим дожену Алі».

Хто правий? Скільки годин знадобиться Беа і Серо окремо, щоб наздогнати Алі?

Трохи місця для ваших думок.

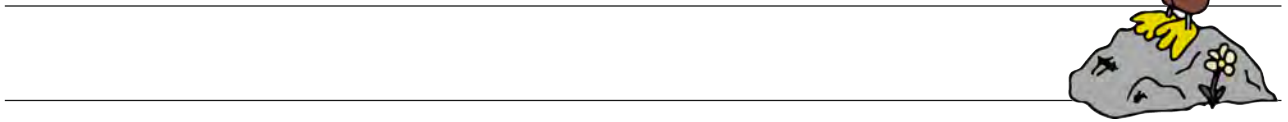
Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

1

**Вставати важко!** У своєму гуртожитку лицарі використовують такий метод: усі лицарі, які вже прокинулися, обходять, щоб розбудити ще сплячих товаришів. Вони дуже швидкі. Розбудити лицаря займає всього одну хвилину.

Сьогодні всі лицарі ще сплять, коли півень Гарі починає кукурікати. Прокидається лише наймолодший лицар. Зараз 7:00.

Скільки лицарів не спиться о 7:01? Поясніть!



Скільки лицарів прокидається о 7:02? Поясніть!

---



---



---

Скільки лицарів прокидається о 7:03? Поясніть!

---



---



---

О 7:10 всі лицарі не сплять. Скільки їх? Поясніть!

---



---



---



---



---



---



**1** Сьогодні 23 учні 3б класу разом зі своєю вчителькою пані Розумничкою відправляються на ковзанку. Вартість входу 3 євро для однієї людини. Пані Розумничка вже збрала 64 євро і спантеличена. Чому вона спантеличена?



---

---

---

---

Скільки потрібно заплатити за весь клас разом із вчителькою?

Поясніть свою відповідь. Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

2 Це неділя. Біля криниці зустрічаються Срібна Мері, Золота Мері та мати Хільда.



Я кожні шість днів ходжу до криниці!

Я ходжу до криниці через день!

Я кожні п'ять днів ходжу до криниці!



Через скільки днів усі троє знову зустрінуться біля криниці? \_\_\_\_\_

Поясніть свою відповідь.

Обчисліть, намалюйте або запишіть щось.

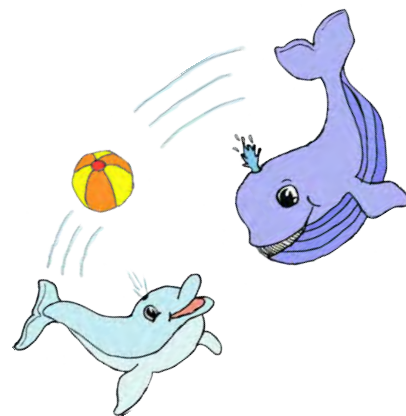
**1** Цього року у змаганнях з фінболу змагалися десять команд.

Кожна команда зустрічається з іншою командою двічі.

Є очки золоті і залізні.

Ось як обліковуються очки, коли команда програє:

- Якщо команда все ще має золоті очки і програє, вона повинна здати одне золоте очко.
- Якщо команда не має золотих очок і програє, вона отримує одне залізне очко.



Ось як підраховуються очки, коли команда перемагає:

- Якщо команда все ще має залізні очки і виграє, вона може позбутися одного залізного очка.
- Якщо команда не має залізних очок і виграє, вона отримує одне золоте очко.

У разі нічиєї рахунок не змінюється для жодної з команд.

У перших двох матчах року команда Долфі змагається з командою Вала. Команда Долфі виграє обидва матчі. Який поточний рахунок? Поясніть!

---



---

Команда Окто підійшла до кінця ігрового часу. У скількох матчах вона брала участь? Поясніть!

---



---

До кінця ігрового часу команда Окто зуміла отримати три золоті очки. Скільки разів команда Окто виграла? Скільки разів вони могли програти? Скільки їхніх матчів могли б закінчитися нічиєю? Поясніть!

---



---



---



---

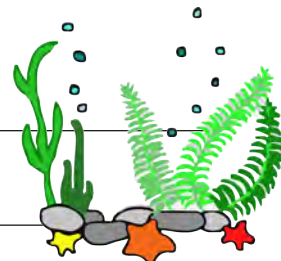
2

На день народження бабуся дарує Барні акваріум з чудовою рибою. Є 6 червоних риб, 3 сині і 9 зелених риб. Риби такі особливі, тому що можуть змінювати свій колір.

Коли червона риба торкається зеленої, обидві стають синіми.

Коли червона риба торкається синьої риби, обидві стають зеленими.

Яке правило ви впізнаєте? Поясніть своє правило!




---



---

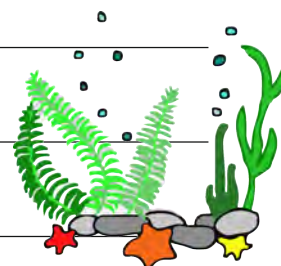


---

Коли червона риба торкається червоної риби, обидві залишаються червоними.

Коли зелена риба торкається зеленої риби, обидві залишаються зеленими.

Яке правило ви впізнаєте? Поясніть своє правило!




---



---



---

Чи можливо, що колись у Барні будуть риби лише одного кольору?  
Поясніть свою відповідь!

---



---



---



---



---



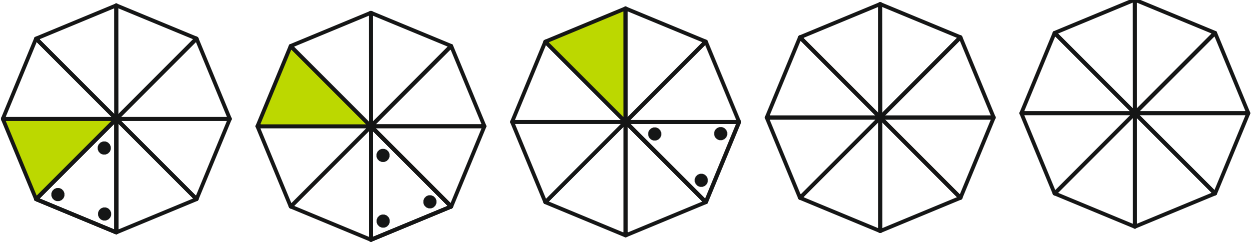
## **6 Образні моделі**

### **Логічне дедуктивне мислення на основі образних закономірностей**

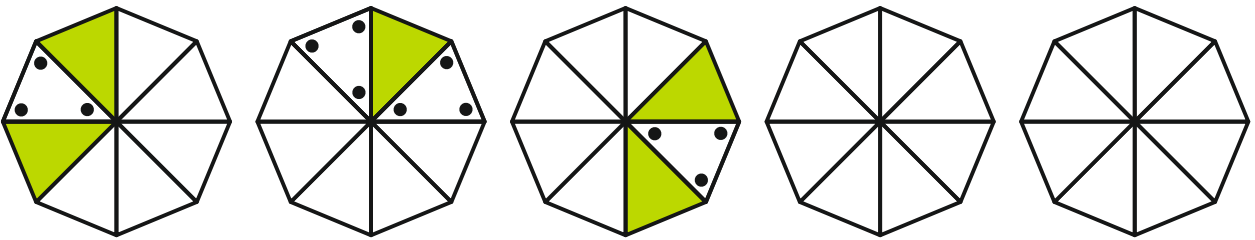
<b>6.1 Розпізнавання та продовження закономірностей . . . . .</b>	<b>89</b>
Виявлення та застосування закономірностей	
<b>6.2 Багато квадратів і прямокутників . . . . .</b>	<b>94</b>
Ознайомлення і створення моделей	
<b>6.3 Обчислення площ . . . . .</b>	<b>96</b>
Визначення та порівняння площ поданих фігур	
<b>6.4 Збільшення масштабу . . . . .</b>	<b>100</b>
Збільшення фігур на папері квадратної форми	
<b>6.5 Просторова уява . . . . .</b>	<b>101</b>
Обробка просторових композицій за допомогою планарних ілюстрацій	
<b>6.6 За допомогою ножиць і паперу . . . . .</b>	<b>105</b>
Вирізання фігурок зі складеного аркуша паперу	



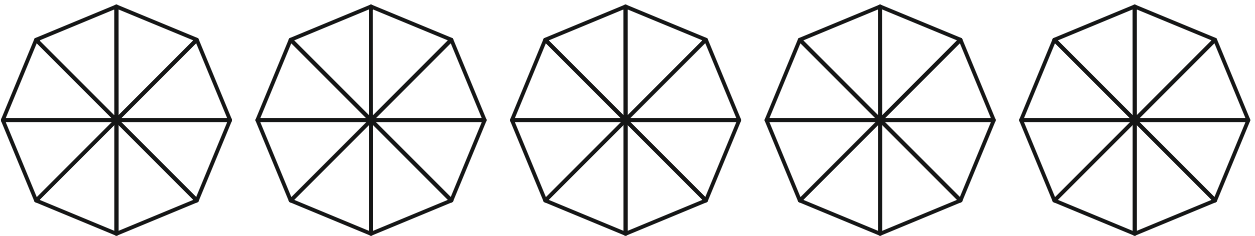
**1** Мартін любить придумувати моделі. Продовжіть його модель!



Також продовжіть наступну модель Мартіна!



Придумайте складну власну модель!



Чому ваша модель складна?

---



---



---



---



---



---



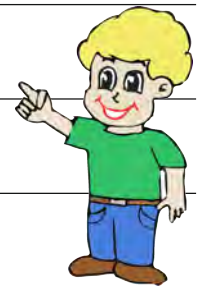
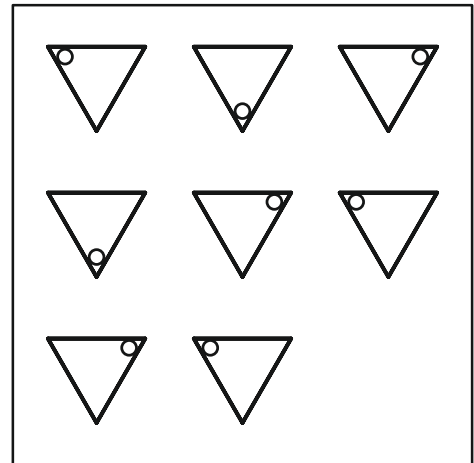
**2** Тиль почав створювати незвичайний малюнок.

На жаль, йому заважали і він не закінчив.

Він планував намалювати щось унизу праворуч.

Будь ласка, закінчить його малюнок!

Поясніть свій вибір!



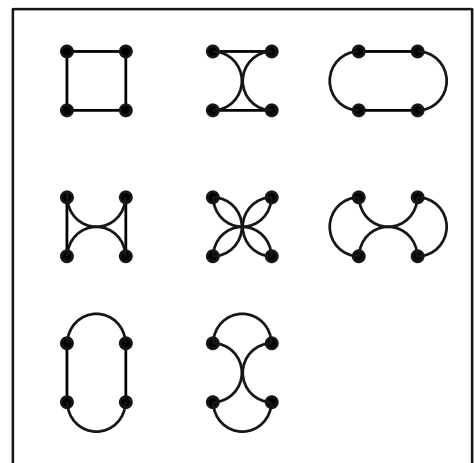
Також Ані розпочала створювати свій незвичайний малюнок.

На жаль, їй також завадили і вона не змогла закінчити.

Вона планувала намалювати щось унизу справа.

Будь ласка, закінчить її малюнок.

Поясніть свій вибір!



3

**Ельфам не потрібні ключі для дверних замків.**

Двері відкриваються, коли загадка розгадана.

Спробуйте відкрити ці двері!

**Порада:** у нижньому правому куті чогось не вистачає. Намалюйте те, чого, на вашу думку, не вистачає! Поясніть, чому двері повинні були відкритися зараз!

---



---




---



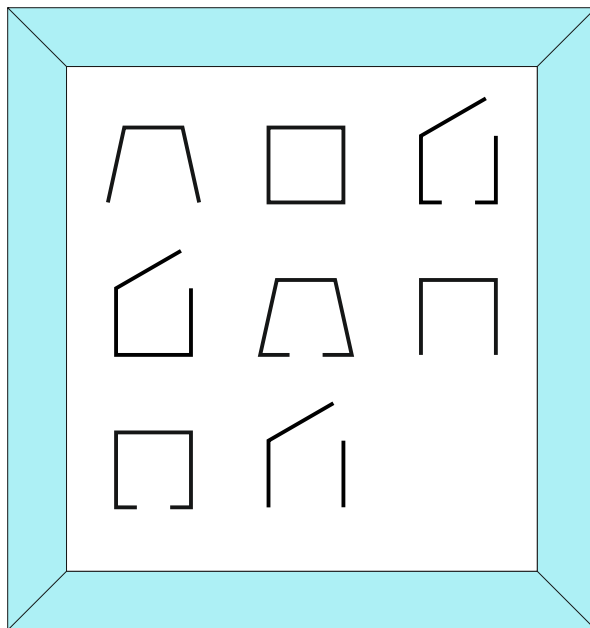
---



---



---



Спробуйте відкрити ці двері!

**Порада:** у нижньому правому куті чогось не вистачає. Намалюйте те, чого, на вашу думку, не вистачає! Поясніть, чому двері повинні були відкритися зараз!

---



---



---



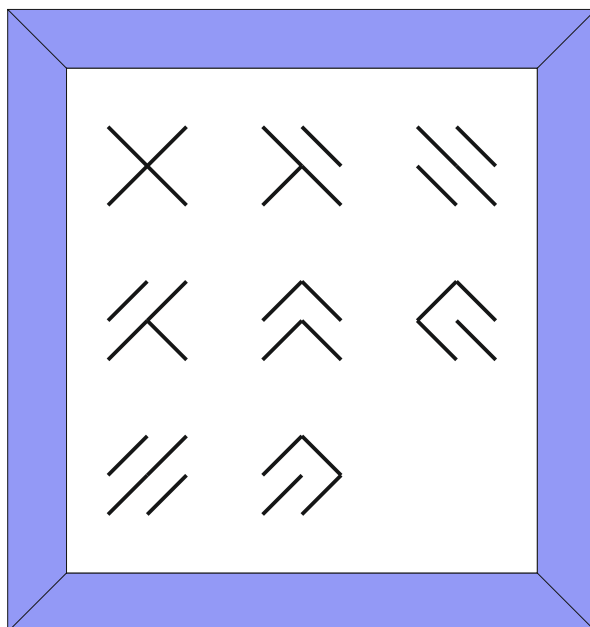
---



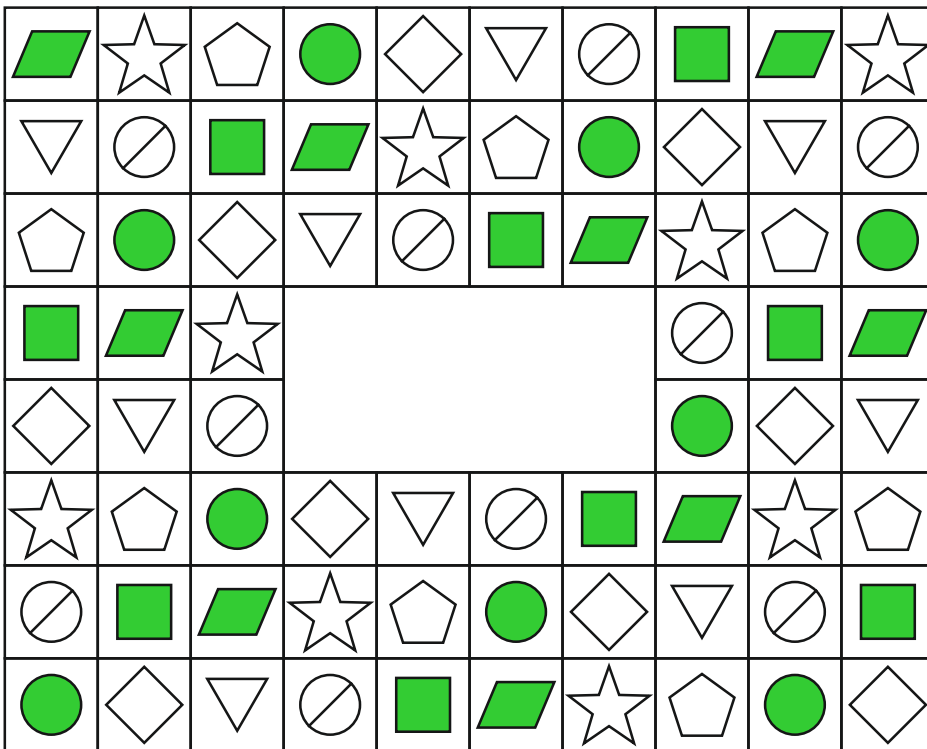
---



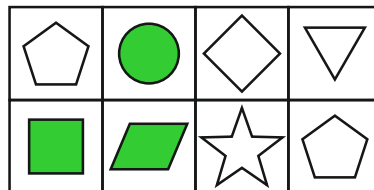
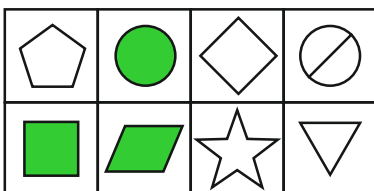
---



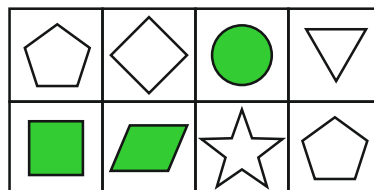
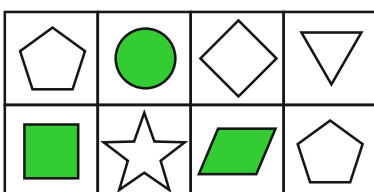
4 Придивіться: посередині є порожнє місце.



Обведіть прямокутник, який, на вашу думку, найкраще підходить в середину.



?



Чому вибраний вами прямокутник підходить?

---

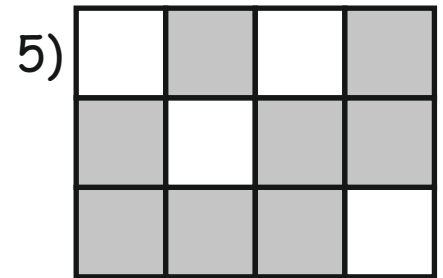
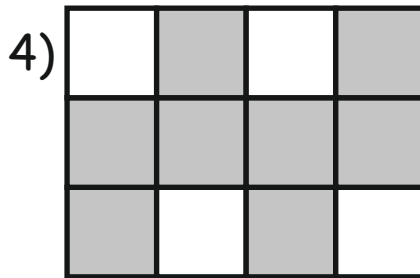
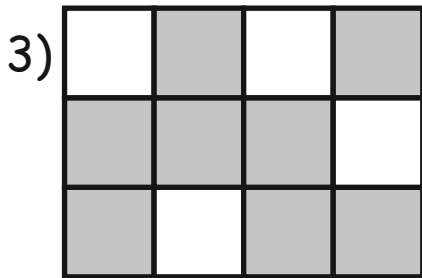
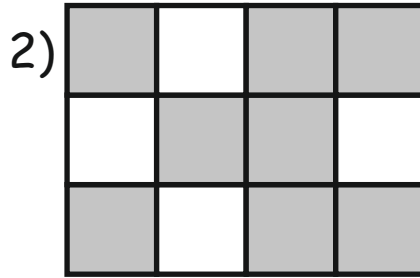
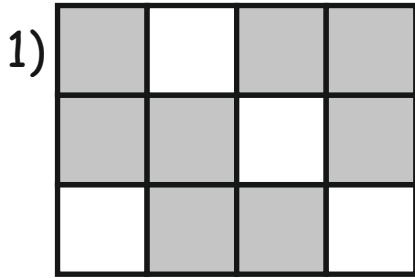
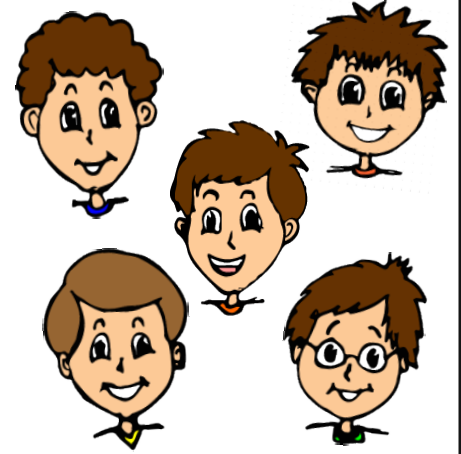


---

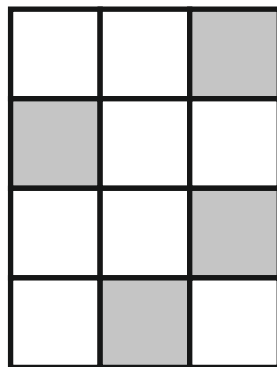


---

5) 5 братів грають з табличками. Таблички білі з одного боку і сірі з іншого. Викладають 5 комбінацій.



Яка з їхніх комбінацій найкраще підходить до цієї картини? \_\_\_\_\_



Поясніть свою відповідь!

---



---



---



---



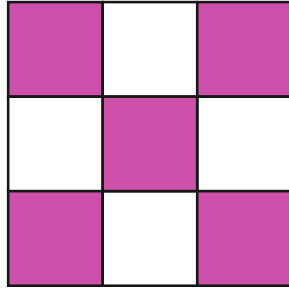
---

1



Я бачу 9 квадратів!


Я бачу набагато більше квадратів!



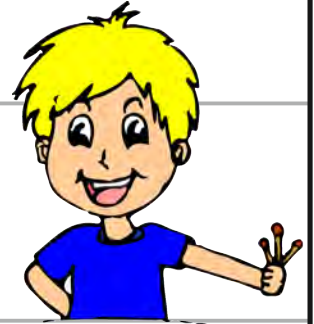
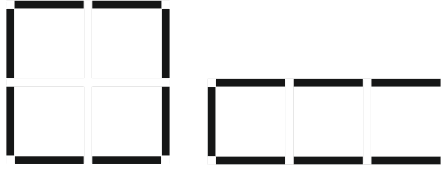
Скільки квадратів з кожного боку бачите ви?

Відповідь: \_\_\_\_\_

Тояснення! Напишіть чи намалюйте!

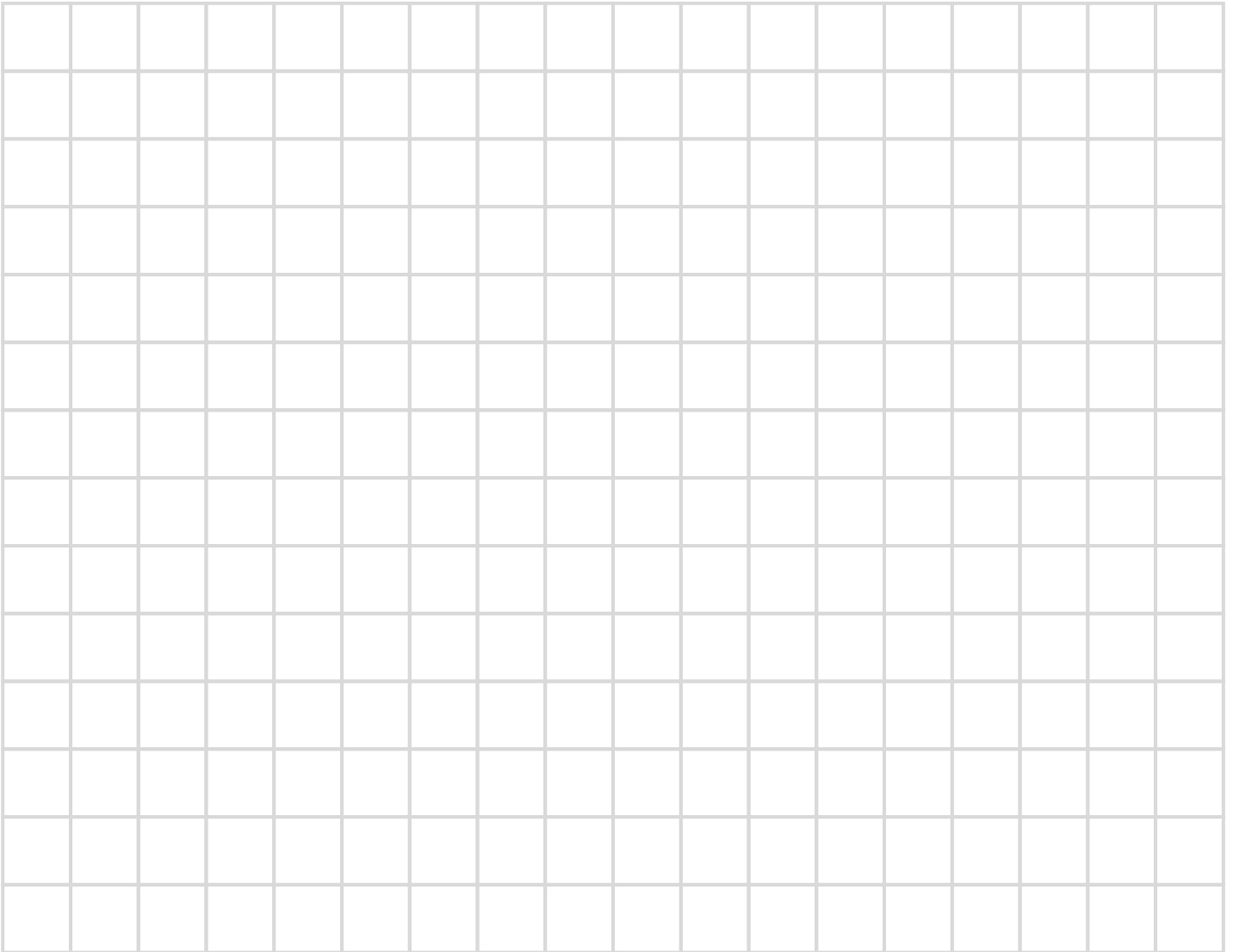
2 У Тіма є кілька кісточок. Він хоче використати їх, щоб скласти 4 сторони прямокутних фігур. Він починає з 4 кісточок. Так він може скласти всього 1 фігурку. 

Він бере 8 кісточок. Тепер він може скласти 2 різні прямокутні фігури.



Потім він бере 18 кісточок.

Скільки прямокутних фігур він може зараз скласти? \_\_\_\_\_ Намалюй їх усі.

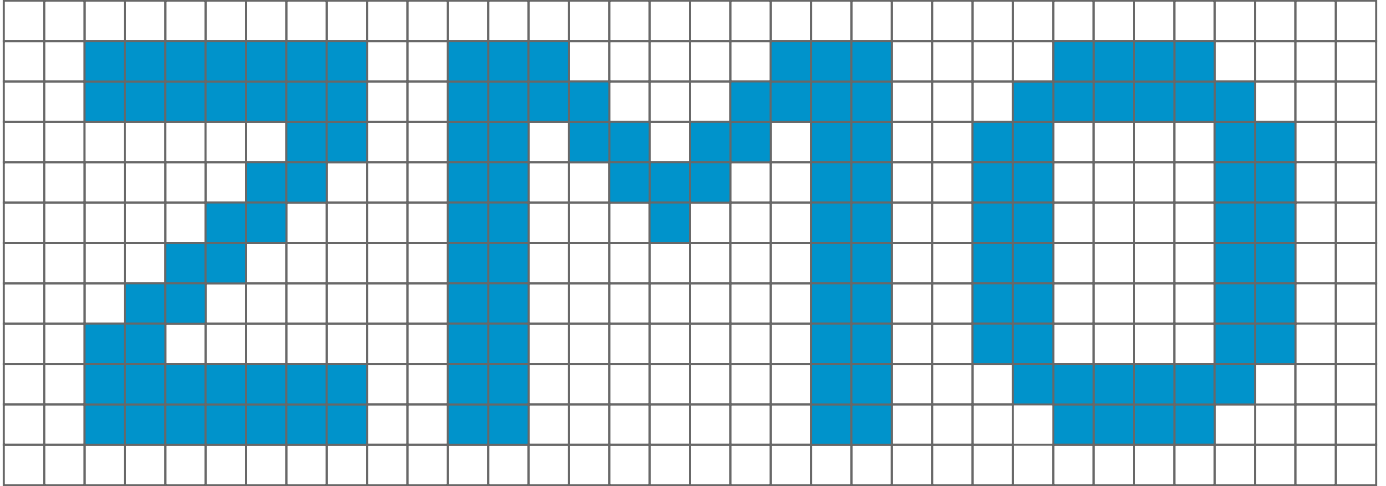


Що ви помітили? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

① Тіна зображує три букви на папері в клітинку:



Для якої букви Тіна використала найбільше клітинок? \_\_\_\_\_

Для якої букви Тіна використала найменше клітинок? \_\_\_\_\_

Так я знайшов свій результат:

---



---



---



---



---



---



---



---



---

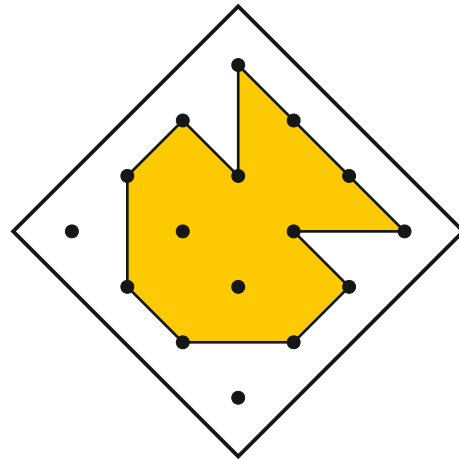
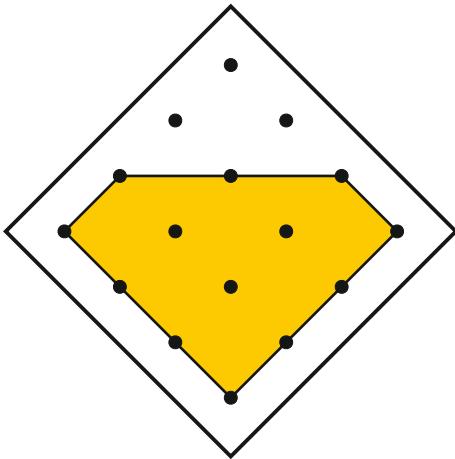
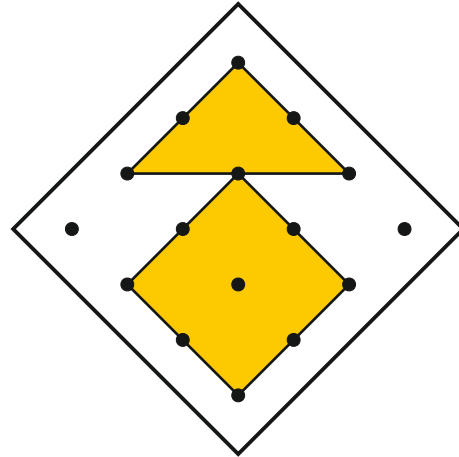
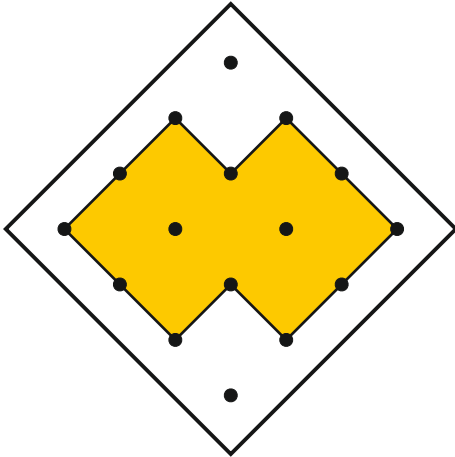


---



2

Розгляньте площі жовтих фігур!



Що ви помічаєте?

---



---



---



---



---



---



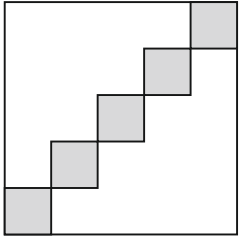
---



---

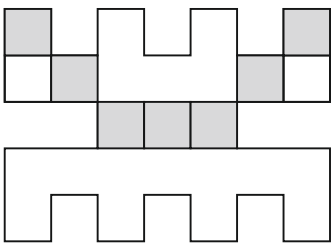


**3** Тара має 150 маленьких сірих квадратів.  
 Вона використовує їх, щоб викласти дві зони.  
 Поміркуйте, скільки квадратів їй потрібно на кожну з зон!  
 Поясніть свої відповіді!



Для цієї Тарі потрібно \_\_\_\_\_ невеличких квадратів.

Пояснення: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_



Для цієї Тарі потрібно \_\_\_\_\_ невеличких квадратів.

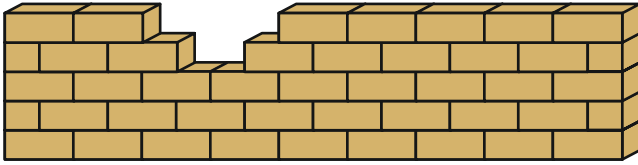
Пояснення: \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

Що ви помічаєте?

\_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

**4** Злодійський гном.

З цієї стіни гном вкрав три цеглини.  
Але йому все одно потрібно більше цегли.



Скільки цеглинок вкрав гном з цієї стіни?  
Поясніть свою відповідь!

---



---



---



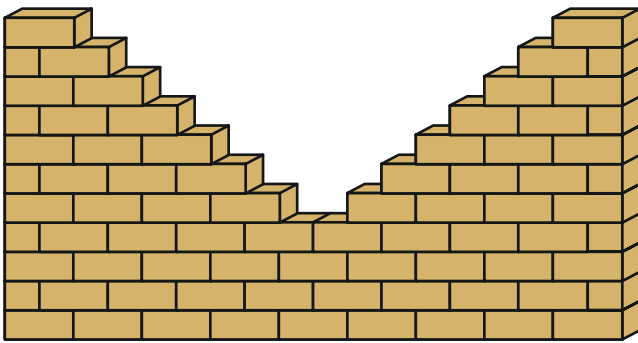
---



---



---



Скільки цеглинок вкрав гном з цієї стіни?  
Поясніть свою відповідь!

---



---



---



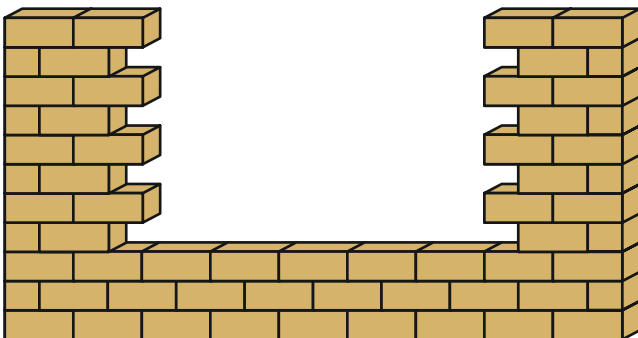
---



---

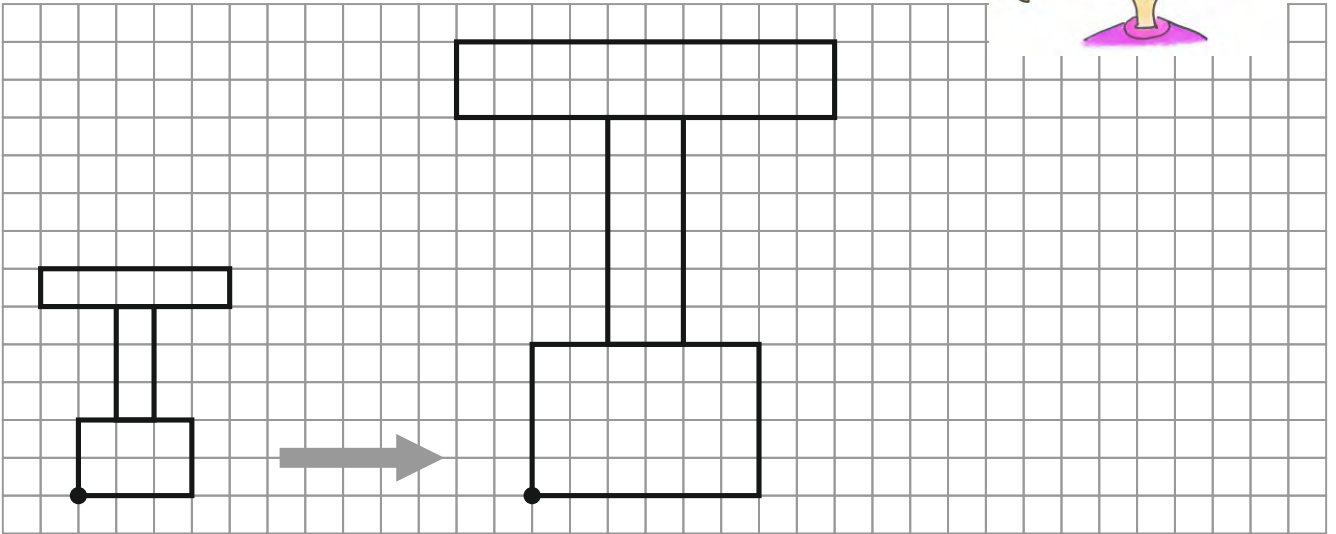


---



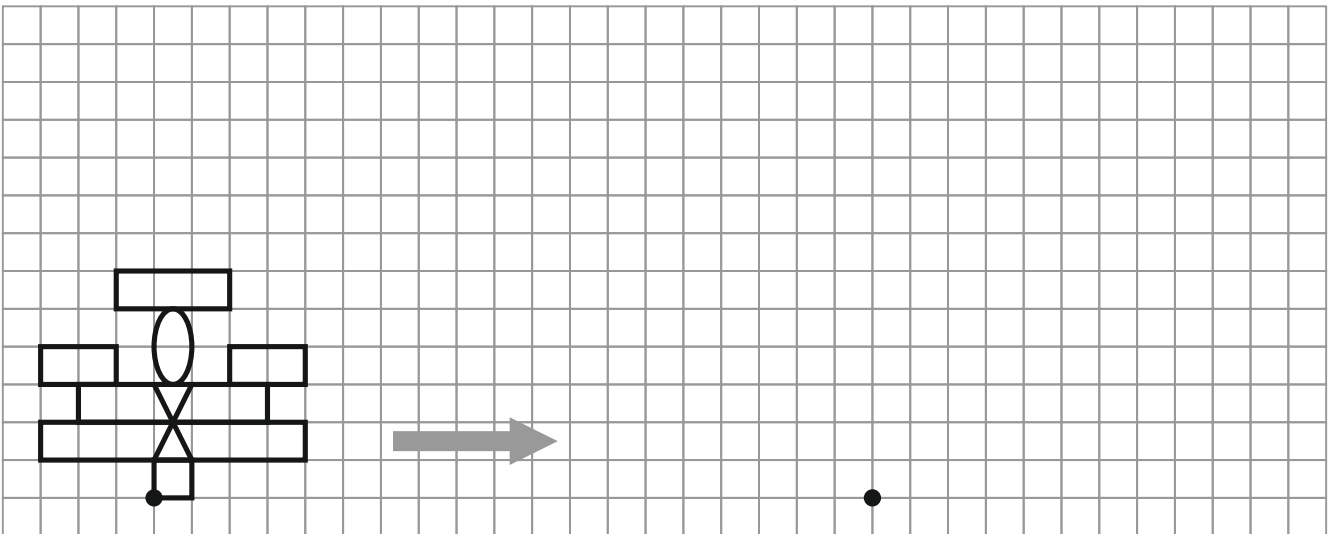
1 Зіна любить малювати.

Сьогодні вона практикує масштабування.



Зіна намалювала нову фігуру.

Збільшіть цю фігуру, як це зробила щойно Зіна!



Як вам вдалося збільшити масштаб?

---



---

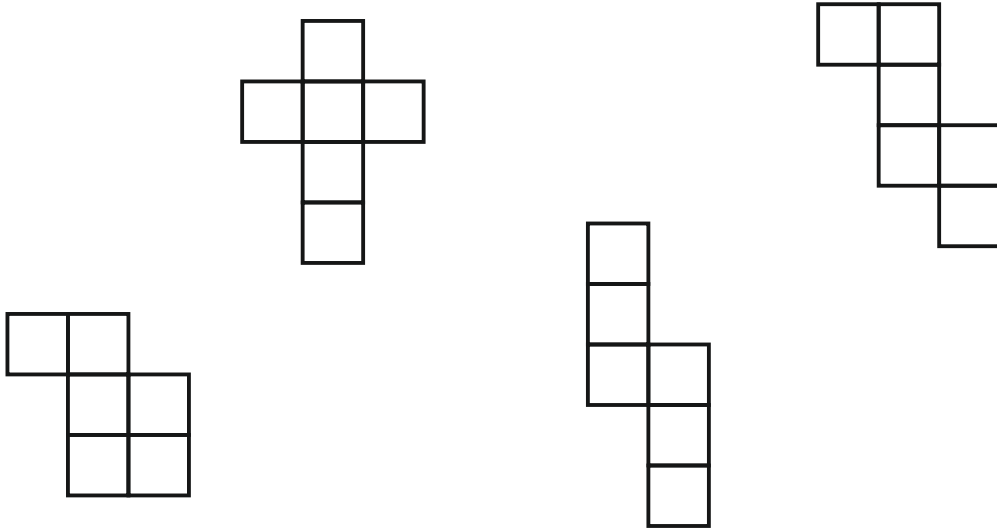


---



---

- ① На своїй вечірці ельфи хочуть пограти з кубиками. У них є шаблони, які вони можуть використовувати для створення кубиків. Подивіться уважно! Які з їхніх шаблонів добре підходять для створення кубиків?



Поясніть!

---



---



---



---



---



---



---



---



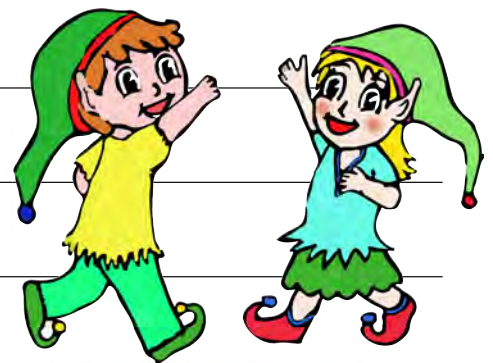
---



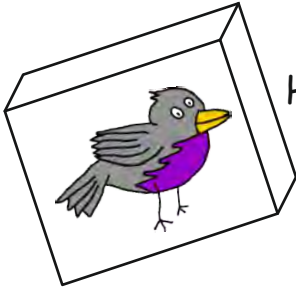
---



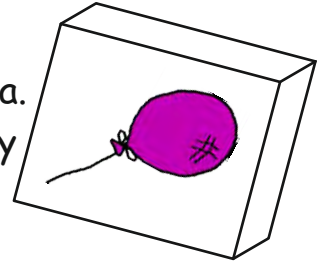
---



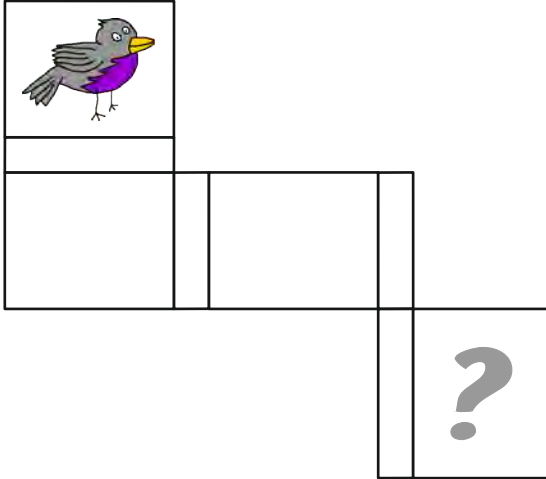
2



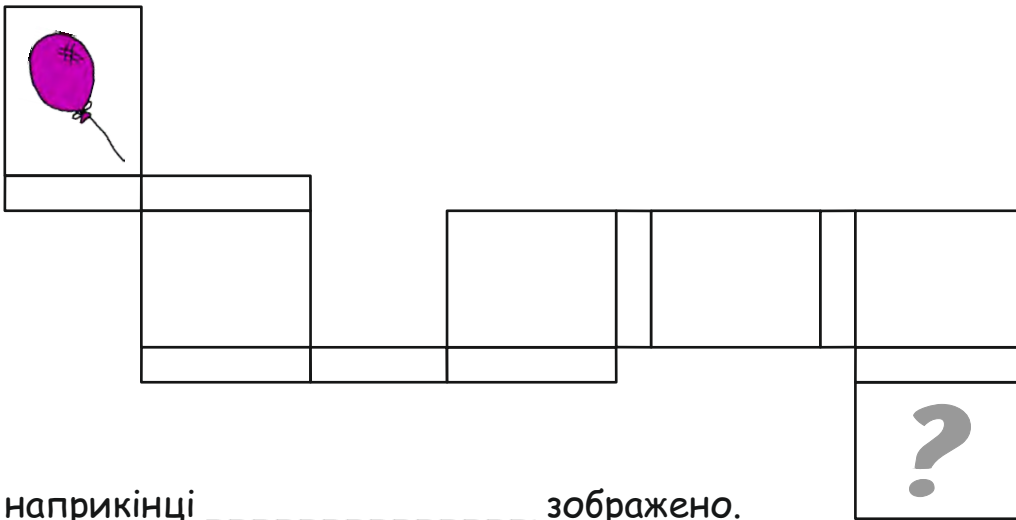
Карлос грає з коробкою.  
На Передній стороні зображена пташка.  
На задній стороні зображено повітряну кулю.  
Карлос обережно розібрав коробку на частинки.



Знайди, хто буде зображений наприкінці!



наприкінці \_\_\_\_\_ зображено.



наприкінці \_\_\_\_\_ зображено.

Що ви помітили?

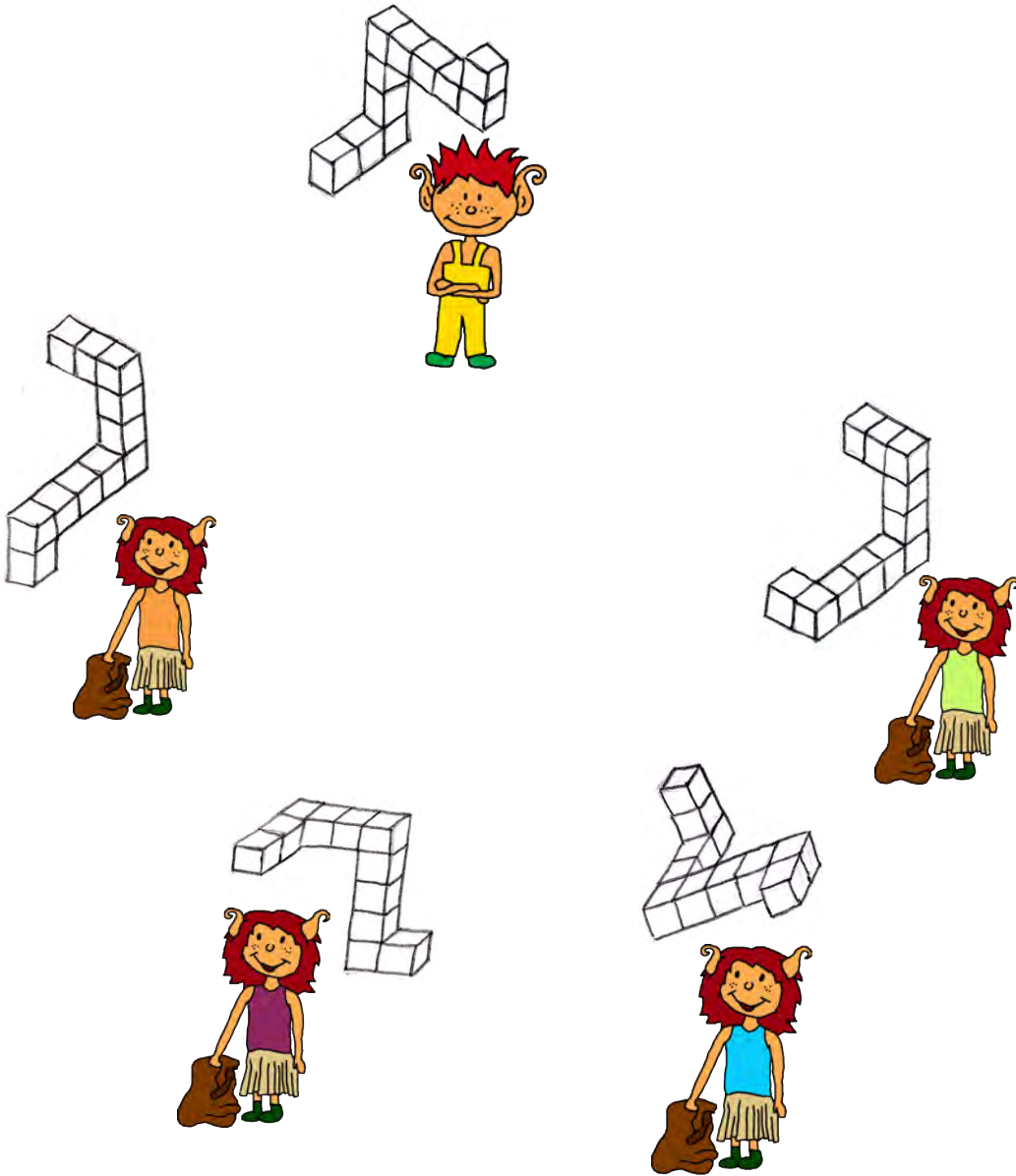
---

---

---

---

- 3 **Фаро склав фігуру, як у його сестри**  
 Хто його сестра? З'єднайте лінією Фаро і його сестру.



Поясніть свій вибір!

---



---



---



---

**4** Столяр Віл створив великий дерев'яний куб.

Він фарбує його з усіх сторін синім кольором.

Скільки синіх сторін у кубика?

---



---

Через тиждень він знову займається своїм синім дерев'яним кубом.

Він розпилує його і отримує 27 маленьких дерев'яних

кубиків однакового розміру. Як йому це вдалося?


Віл розглядає свій маленький дерев'яний кубик.

Скільки з них синіх з усіх боків? \_\_\_\_\_

Скільки з них синіх лише з одного боку? \_\_\_\_\_

Скільки з них синіх з кількох сторін? \_\_\_\_\_

Поясніть свою відповідь! Обчисліть, намалюйте або напишіть щось.



- 1** Візьміть складений аркуш паперу. Тепер виріжте фігурку таким чином, щоб при розгортанні паперу ви бачили коло. Подумайте добре. Ви не можете розрізати після розгортання.
- Підказка! Що важливо для вирізання, щоб в результаті вийшло коло?



---

---

---

---

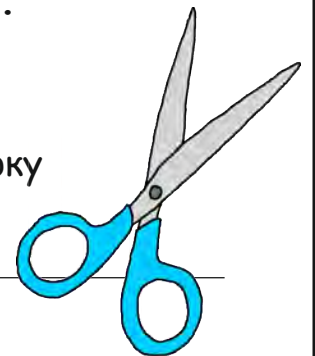
---

---

---

---

- 2** Візьміть складений папірець. Тепер виріжте фігурку таким чином, щоб при розгортанні паперу ви бачили п'ятикутну зірку. Подумайте добре. Ви не можете змінювати форму після розгортання.
- Поясніть, що ви враховували, щоб створити п'ятикутну зірку



---

---

---

---

---

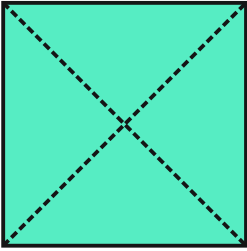
---

---

---

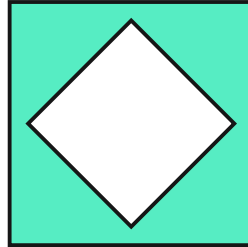


3



Візьміть папір і виріжте з нього квадрат.  
Потім складіть цей квадрат двічі по лініях згину, які ви бачите ліворуч, щоб вийшов трикутник.

Тепер виріжте так, щоб ви отримали після розгортання фігуру, яка розміщена праворуч:



Подумайте добре! Не витрачайте папір.

Що важливо під час розрізання?  
Які поради ви дасте іншим?

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



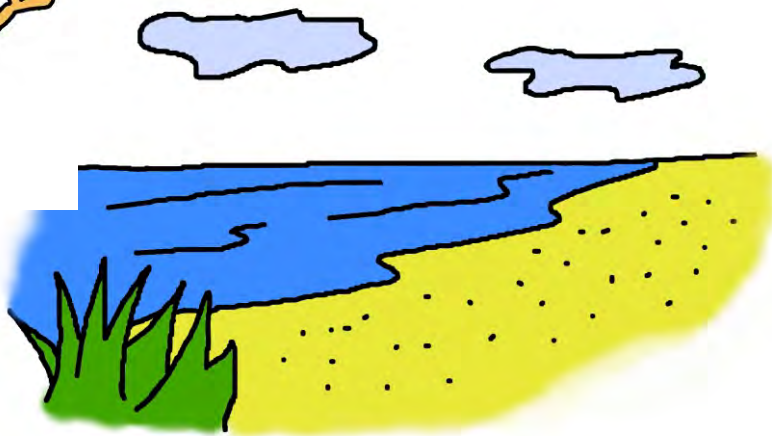
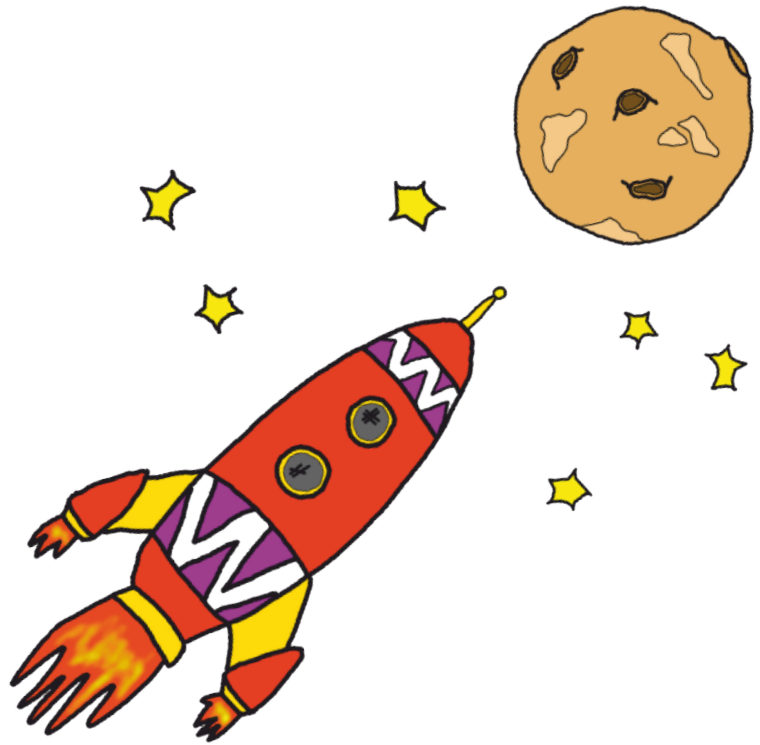
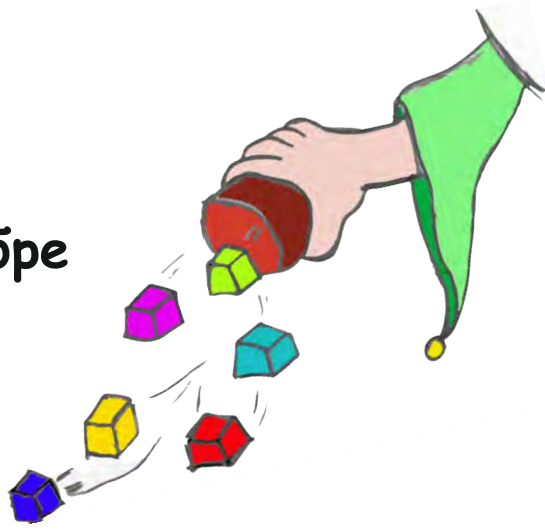
---



Більше місця для думок!

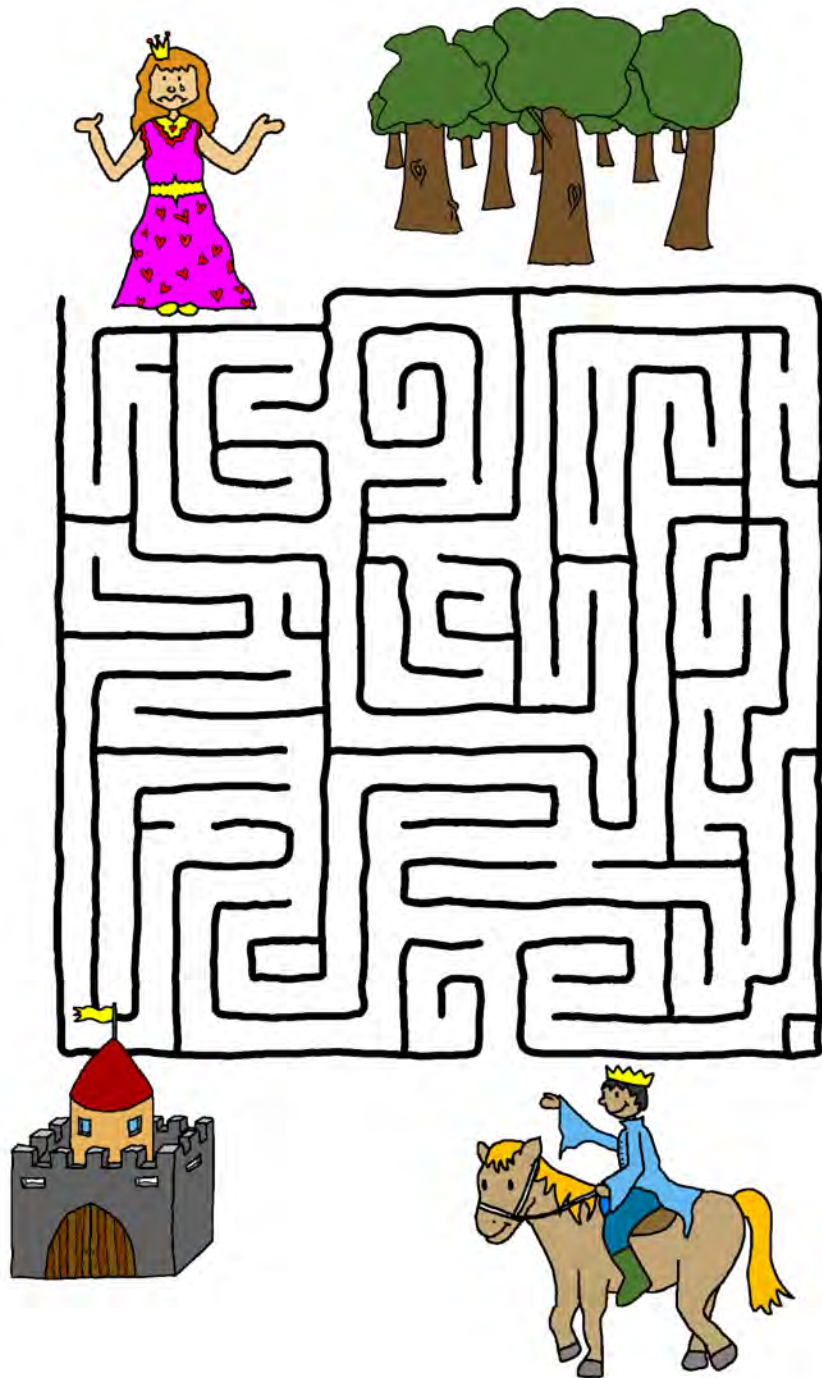


7 Все добре, що добре  
закінчується  
Лабіринти та багато  
іншого





- 1 Допоможи принцу дістатися до принцеси.  
Намалюйте зручний шлях через лабіринт.



Чому ваша дорога зручна для принца і принцеси?

---

---

---

**2** Знайди шлях до скарбу!

Як можна пройти через лабіринт простіше і складніше?

---

---

---

---

---

---

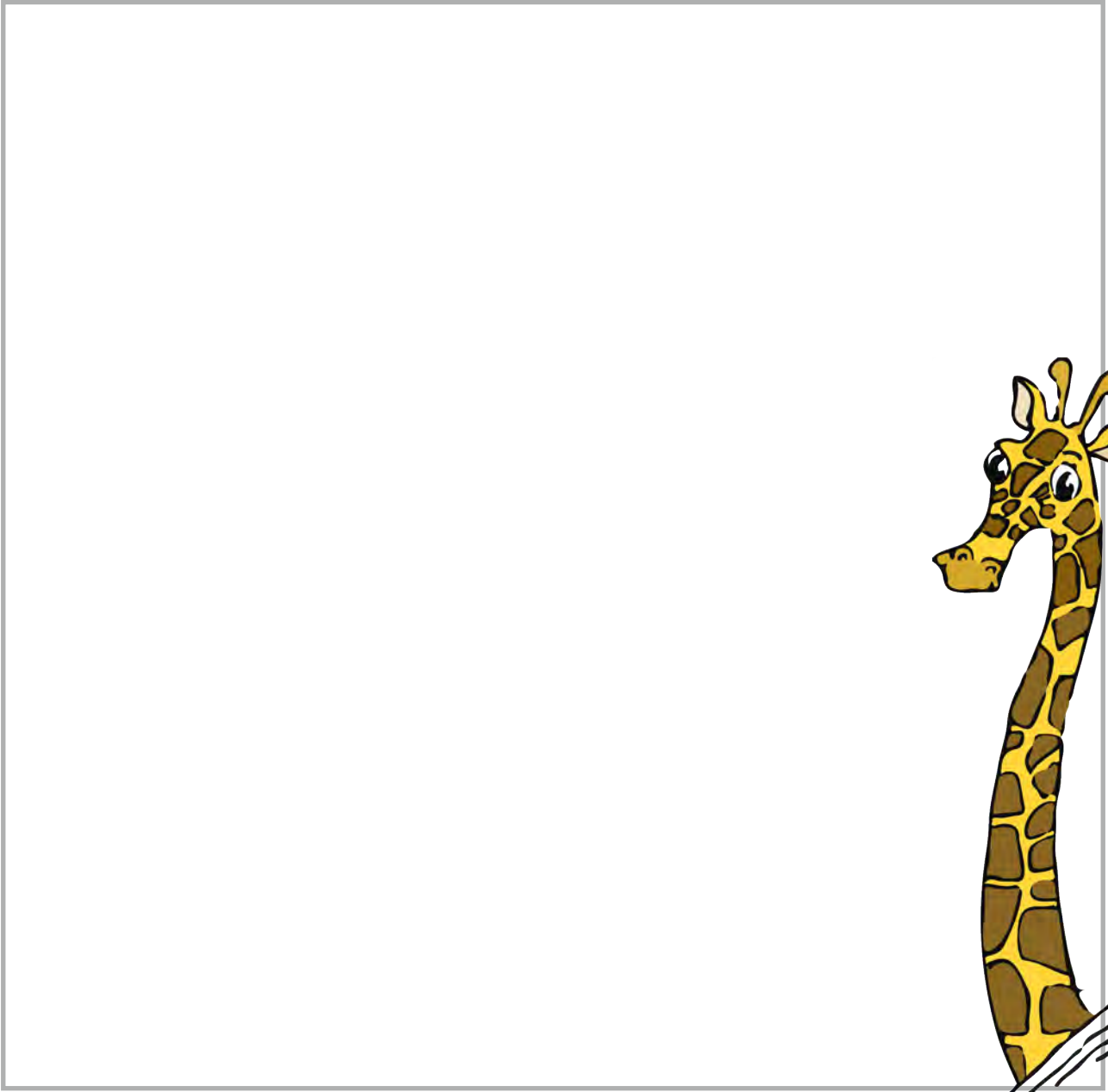
---

---

---

---

3 Уважно подумайте, які дуже складні обчислювальні задачі ви можете розв'язати. Запишіть їх і розв'яжіть!



Чому ваше завдання важке?

---

---

---

---

---



**4** Порахуй найдовше як зможеш!

837, 854, 840, 857,

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

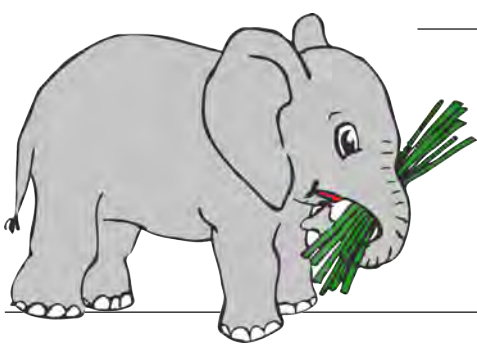
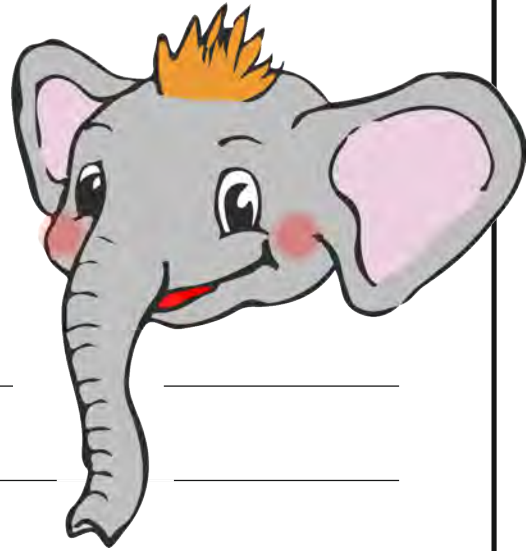
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Більше місця для висловлення думок!



## В. Перспектива

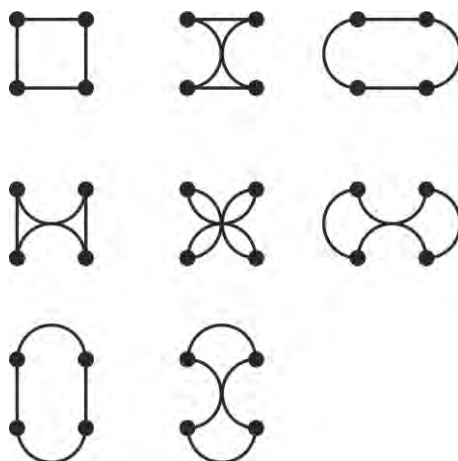
*Математика – це не споглядання.  
Це не сукупність знань, не символи на сторінці.  
Це те, з чим ви граєте, що ви робите.*

~ Кіт Девлін ~

Аналізуючи підходи і розв'язання, надані найкращими дітьми нашої вибірки, знову і знову стає очевидним, що ключовим елементом для розуміння математики є логічне дедуктивне міркування, досягнуте шляхом мислення в мережах і вивчення математичних взаємозв'язків.

Крім нашої роботи з математично обдарованими дітьми, ми також приділяємо велику увагу нашим багаторічним дослідженням розвитку математичного мислення, включаючи дослідження основних принципів логічного мислення. У цьому контексті ми адаптували один із форматів завдань Спірмена (Spearman, 1904; див. також Raven, 1965) і уточнили його в термінах двох різних типів логічного висновку. Фундаментальна ідея полягає в тому, що залежно від основних методів мислення, які використовує людина, орієнтація у світі, типи джерел для отримання власної точки зору та формування світогляду не є однаковими.

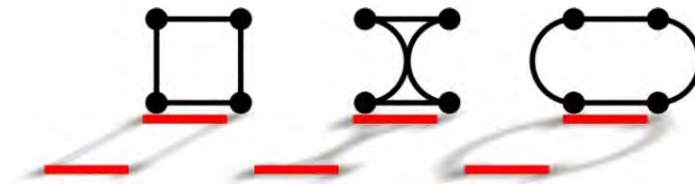
Давайте розглянемо одну з наших матриць (рисунок В1). У нижньому правому куті відсутня фігура. Який з них може підійти? Чому?



**Рисунок В1:** Приклад завдання з інструменту якісної діагностики предикативно-логічного та функціонально-логічного мислення (QuaDiPF, (Schwank, 1999/2000))

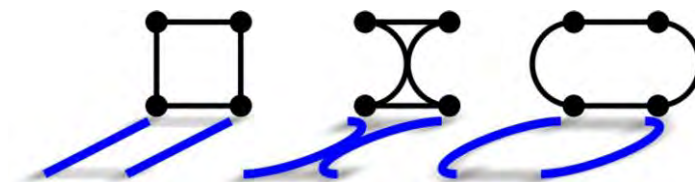
Когнітивні процедури дозволяють встановлювати відносини між фігурами: конкретні компоненти фігури виходять на перший план, а інші компоненти залишаються уявними. Механізм, що визначає, на яких компонентах зосереджено увагу, а які сторони залишаються ізольованими, є основою двох типів мислення, які ми визначили. (Schwank, 2003).

**Предикативно-логічне мислення:** тип логічного зв'язку, який встановлює відносини, зосереджуючи увагу на подібних або ідентичних компонентах об'єктів. Щодо даного завдання, то в першому ряду верхня і нижня лінії «належать разом», але бічні лінії не підходять за шаблоном (рисунок В2). Порядок і структура методу. Продовжуючи цю когнітивну оцінку, виходить фігура з лініями з нижнього ряду (верхній і нижній) і правої колонки (з боків) відповідно.

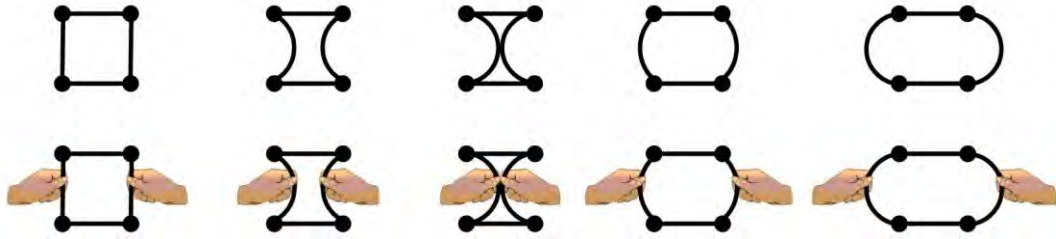


**Малюнок В2:** Ментальна конструкція з предикативно-логічним фокусом. Верхня та нижня лінії, які зазначаються як ідентичні.

**Функціонально-логічне мислення:** тип логічного зв'язку, який встановлює відносини шляхом мислення в послідовності дій і ефектів, які досягаються за допомогою того, що відмінності в об'єктах можуть бути перетворені один в інший (рисунок В3). Щодо даного завдання, то в першому ряду бічні лінії можна направити всередину, а потім назовні. Це подумки створює динамічне уявлення про змінювані фігури. Продовжуючи цю когнітивну оцінку, виходить фігура з витягнутими назовні верхньою, нижньою та бічними лініями. Щоб отримати результати, необхідні міркування, пов'язані з акторами (рисунок В4).



**Рисунок В3:** Ментальна конструкція з функціонально-логічною спрямованістю. Бічні лінії, які спочатку витягуються всередину, потім назовні.



**Рисунок В4:** За допомогою міркування, орієнтованого на дію, можна створити задані цільові фігури. У переносному значенні, руки необхідні для початку та контролю процесу. Тільки пасивного спостереження недостатньо.

Відповідно до результатів інших психологічних досліджень, наш аналіз показав, що хлопчики, як правило, сильніші у функціонально-логічному мисленні, ніж дівчата (див. Schwank, 2001, 2003). Стосовно ранньої математичної освіти, яка сформована на базі значного арифметичного підґрунтя, цю різницю слід враховувати. Обчислення означає обробку чисел. Числа, які змінюються під час обчислення, різними способами залежать від конкретного методу обчислення. Мета – досягти результату. Цьому сприяє розуміння самих чисел як результатів обчислення процесів.

Тому мистецтво навчання розумінню чисел полягає в тому, щоб надати дітям адекватний арифметичний досвід, який демонструє зв'язок між числами на основі дій. Це вимагало б більше приділяти уваги на уроках математики відчуттю функціональних зв'язків і рефлексії з ними. Для цього необхідні дії, керовані ігровими правилами. Необхідно звільнити дидактичний матеріал з тіні його існування, як, просто, допоміжний засіб і зосередитися на значенні: як ігрові світи, які сприяють розквіту математичного мислення, практично демонструючи математичні проблеми та можливі підходи до їх вирішення. Фіксація на письмовій мові математики несе ризик небезпечного спрощення процесів мислення, що складаються лише з погляду на об'єкт, заснованого на запам'ятованому знанні, замість справжнього сприйняття та застосування функцій чисел і арифметичних дій з точки зору процесу (див. також Hefendehl-Hebeker, 2001; Schwank & Nowinska, 2008).

Протягом кількох років нашою основною метою було докладання значних зусиль для розробки математичних ігрових світів, що дозволили б реалізувати саме такий тип уроку математики, який так потрібен. До цього часу ми створили ігровий світ ENSO (орієнтація на числовий простір, пов'язаний з подіями) для дослідження діапазону чисел від нуля до дев'яти, спіральні сходи обчислення для доступу до числового простору від 0 до 19, систему числення Стелланіана для досягнення розуміння функціонування системи

значення місця та числової відповідності для полегшення мультиплікативного розуміння (наприклад, lcm, gcd, квадратних чисел, біноміального формулювання), таким чином, закладаючи міцну, орієнтовану на дію основу для ранньої математичної освіти, яка генерує розуміння математики на основі процесу. Починаючи з дошкільного віку, Динамічні лабіринти пропонують ігровий вступ до формування класичних концепцій, необхідних для математичного розуміння автоматизації та програмування (додаткову інформацію див [http://www.ikm.uni-osnabrueck.de/aktivitaeten/dl/dynamic\\_labyrinths/dynamic-labyrinths.html](http://www.ikm.uni-osnabrueck.de/aktivitaeten/dl/dynamic_labyrinths/dynamic-labyrinths.html)).

Весь вищезгаданий матеріал успішно застосовувався на численних уроках з дітьми від дитячого садка до середнього шкільного віку, а також на тренінгах для фахівців освіти. Одностайне схвалення як дорослих, так і дітей дає підстави сподіватися, що в найближчому майбутньому ці методи навчання приведуть до глибокого, орієнтованого на процеси математичне розуміння багатьох дітей, дасть змогу насолодитися активним і компетентним дослідженням математичного світу.

## **Література**

- Hefendehl-Hebeker, L. (2001): Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser, B. Wollring, B. (Hg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt. 83-98. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
- Raven, J. C. (1965): Advanced progressive matrices. Sets I and II. London: Lewis.
- Spearman (1904): 'General intelligence' objectively determined and measured, American Journal of Psychology. 15, 201–293.
- Schwank, I. (2017): Erlebniswelt Zahlen – Erstunterricht mit der Rechenwendeltreppe. 4. erweiterte und überarbeitete Auflage. Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2013a): Kleine Einsen und ein Wunderwerk. Die Zwergen-Mathe-Olympiade. Grundschule, 11, 16-19.
- Schwank, I. (2013b): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster & J.-H. Lorenz (Hg.): Rechenstörungen bei Kindern. – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 93-138. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Schwank, I. (2010a): Erlebniswelt Zahlen – Spielereien mit der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2010b): Zahlentheater – Spiele mit Holzfiguren zur Vorbereitung der Schulschrift (mit Anwendung am Zahlenstrahl). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2003). Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In: Schwank, I.: Zur Kognitiven Mathematik. [Introduction to Predicative and Funktional Thinking. In: Schwank, I.: On Cognitive Mathematics.] Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 35(3), 70-78.
- Schwank, I. (2001): Analysis of Eye-Movements during Functional versus Predicative Problem Solving. In J. Novotna (Ed.): European Research in Mathematics Education II. 489-498. Prague: Charles University.
- Schwank, I. (1999/2000): QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken. [QuaDiPF – Qualitative Diagnostic Instrument for Predicative versus Functional Thinking.] Sets A/B/C/D. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. & Nowinska, E. (2008). Die Denkform des Formelndenkens. [The Thinking Form of Formula Thinking.] In B. Barzel, T. Berlin & A. Fischer (Hg.): Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker. [Algebraic Thinking. Commemorative Publication for Lisa Hefendehl-Hebeker.] 111-122. Hildesheim: Franzbecker.

## **Веб-посилання**

- Schwank, I.: Mathematische Spielwelten. Letzter Aufruf: 30. August 2017:  
<http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/mathe-magie/index.php/mathematische-spielwelten>
- Schwank, I.: Dynamische Labyrinth. Letzter Aufruf: 28. August 2017:  
<http://www.mathedidaktik.uni-koeln.de/11642.html>





# Д: На завершення

**Сертифікати** (шаблони копій)

Сертифікат

Бронза сертифікат

Срібний сертифікат

Золотий сертифікат

Сертифікат для вчителя

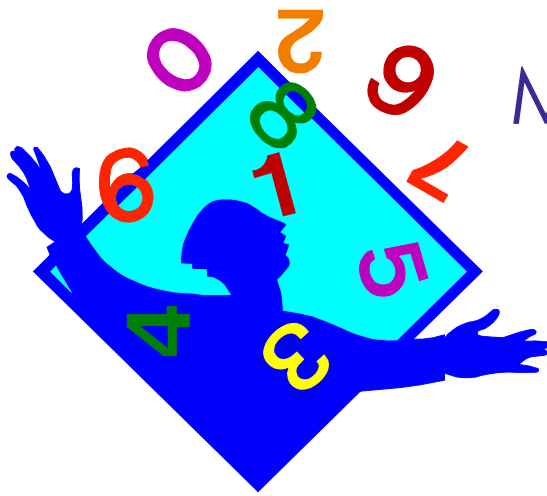
**МОГ-учасники групи**

виступили і без їх підтримки МОГ не було б реалізовано протягом 13 років.

**Заяви МОГ-дітей щодо участі в турі МОГ-Мозок.**



Велике щорічне заключне свято МОГ в Університеті Оснабрюк



# Математична олімпіада ГНОМІВ

Ім'я та прізвище

---

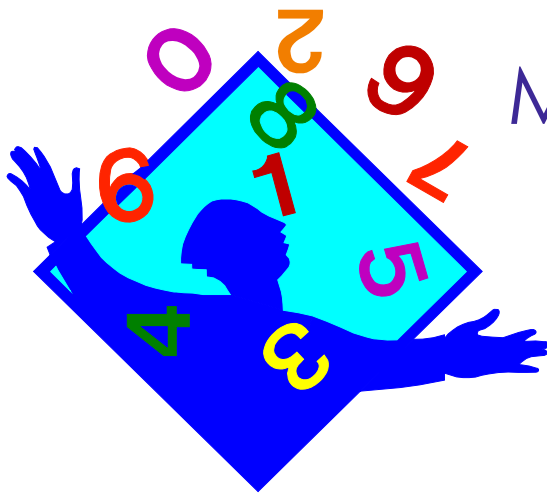
Школа

---

Клас

---





# Математична олімпіада ГНОМІВ

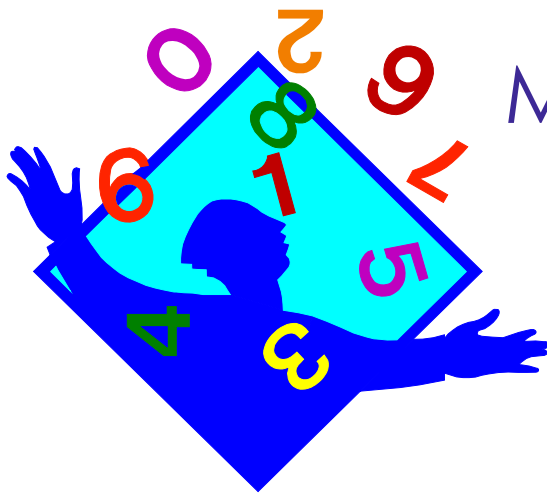
## Бронза

Ім'я та прізвище

Школа

Клас





# Математична олімпіада ГНОМІВ

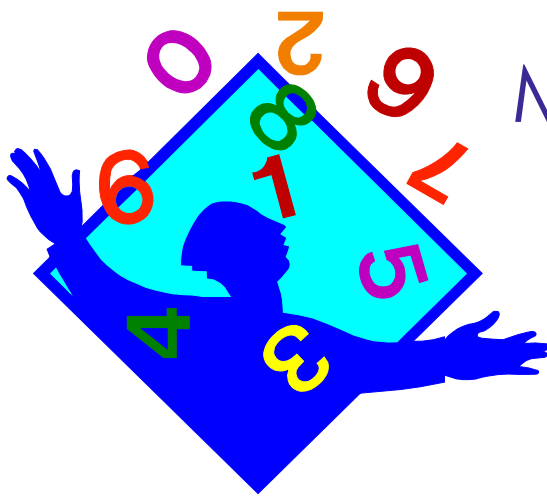
## Срібло

Ім'я та прізвище

Школа

Клас





# Математична олімпіада ГНОМІВ

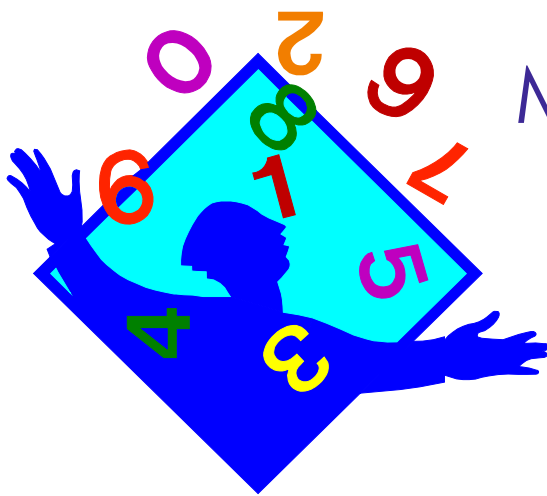
## Золото

Ім'я та прізвище

Школа

Клас





# Математична олімпіада ГНОМІВ

Школа

---

Клас група удосконалення

---

інтенсивно та успішно керується

---



# МОГ - учасники групи

Постійний науковий керівник: проф. д-р Інге Шванк.

Завдяки великій відданості багатьох людей вдалося провести МОГ протягом 13 років. Деякі з них є справжніми фанатами МОГ і взяли участь у багатьох раундах.

Більшість членів - учні початкової школи, які вивчають математику, інші - співробітники університету або впевнені волонтери.

Усі вони заслуговують на велику подяку!

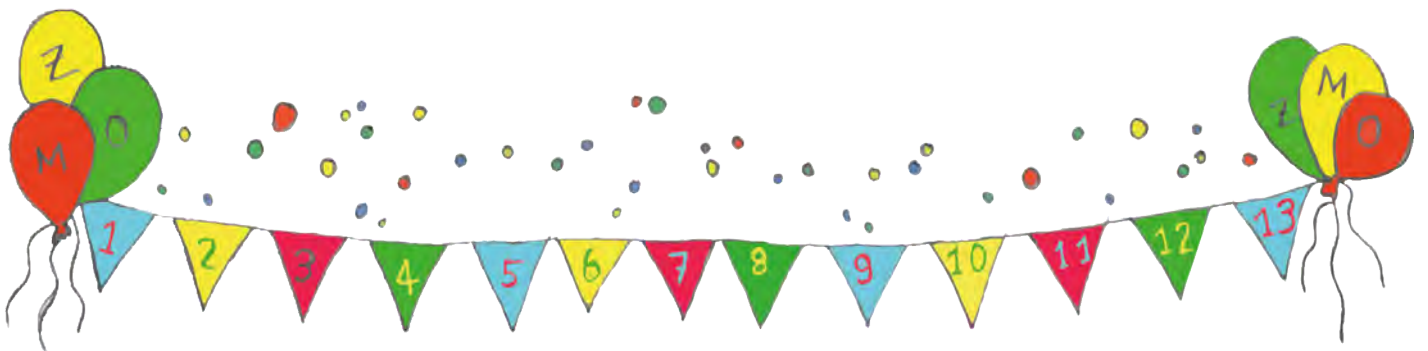


Олімпіада з математики

для учнів 3-х класів міста та району Оснабрюк



Anke Aring	Wiebke Fritz	Wiebke Klaue
Alexander Auch	Kathrin Fühner	Anja Knochenwefel
Kerstin Bartke	Marion Gawlik	Anne Köhler
Anke Becker	Christopher Gerke	Judith Koonen
Verena Beckmann	Regina Gerlach	Natascha Korte
Carsten Beernink	Katharina Gleis	Kathrin Kraicziczek
Chantal Bennek	Eva Maria Gretzmann	Björn Kremp
Kathrin Blocksdorf	Corinna Hänisch	Margit Krützhake
Katja Boeck	Dorit Heckeroth	Jenny Kursawe
Miriam Bollmer	Franziska Heckeroth	Thomas Kybart
Imke Bolz	Dana Heinze	Maria Lager
Sina Böttger	Vanessa Hermes	Judith Lagies
Jana Bröcker	Marianne Herzberg	Eva Lasar
Bianka Bruchwald	Wibke Hille	Nils Linnemann
Lisa Brückel	Manuela Hilmes	Johanna Lohmann
Frauke Bruns	Burgis Hoffmann - zu Höne	Nicole Lüdiger
Prof. Dr. Elmar Cohors-Fresenborg	Pia Hörstermann	Gaby Lüken
Anna Deppen	Martina Hülsmeier	Monika Lütke Dreimann
Carina Deters	Thea Israel	Tomke Lüttel
Julia Detert	Solveig Jensen	Julia Lux
Johannes Dieker	Sabine Jones	Sabrina Macke
Nicole Dijks	Emilia Jüngling	Corinna Maier
Susanne Dreier	Angie Kalverkamp	Fabienne Martini
Verena Dübbert	Marei Kaminski	Annalena Masur
Annika Düvel	Katharina Karrasch	Ramona Vanessa Meier
Christine Ecksele	Jörg Erik Kinner	Bastian Mertens
Sabrina Frieling	Dennis Klaffei	



# Висловлення дітей-учасників МОГ

МОГ - Потяг мізків - Раунд, тому що...

wir herausgefordert werden möchten.

ми хочемо, щоб нам кидали виклик

Weil's Spaß macht!

Бо це весело!

ich Mathe sehr sehr gerne mag und ich werde alles geben. Ich war  
sehr aufgeregt als ich ausgewählt wurde. Irgendwie war mir das  
sehr wichtig. Das Gefühl kann ich nicht beschreiben. Ich bin  
sehr glücklich.

Мені дуже подобається математика і я буду робити все можливе. Я був дуже схвилюваний, коли мене вибрали. Чомусь це було важливо для мене. Я не можу описати це відчуття. Я дуже щасливий.

ich zeigen möchte was ich alles kann.

Я хочу представити свої здібності.

wir ~~haben~~ schon so viel in Mathe gelernt  
haben und wir dann bestimmt gute Chancen  
haben zu gewinnen.

Ми так багато навчилися з математики, тому наші шанси на перемогу, безперечно, були високі.

Weil wir Mathe gut finden. Weil wir gerne etwas  
neues lernen wollen.

Ми любимо математику.  
Ми хочемо дізнатися щось нове.

Damit wir unseren Kopf mal  
richtig einschalten können.

Ми можемо правильно включити голову.

wir für die ganze Klasse mitmachen

Ми беремо участь цілим класу.

Weil ich gerne Mathearbeiten mag. Ich möchte gerne testen wie gut ich wirklich bin.

Тому що я люблю тести з математики. Я хочу перевірити, наскільки я хороший.

wir Schwierige Aufgaben mögen, gerne knobeln und Spaß an Mathe haben.

Ми любимо складні завдання, захоплюватися та розважатися з математикою.

esekun besonders ist.

Це щось надзвичайне. Дуже приємно, що ми можемо це зробити.

es ist sehr schön das wir es dürfen.

Weil ich Mathe liebe. Und wenn man dann auch noch Preise gewinnen kann ist das

Super.

Я люблю математику. І те, що також можна виграти призи, це чудово.

... wir gerne unser Klasse gut vertreten möchten.

... es sicherlich viel Spaß machen wird, mit

anderen Kindern zu rechnen.

... ми хочемо добре представляти наш клас  
... безумовно, буде дуже весело обчислювати разом з іншими дітьми.  
... це буде захоплююча подія.

... es ein spannendes Erlebnis sein wird.

wir Mathe mögen und in der Hirnspornrunde kann man mal so richtig den Kopf anwerfen.

Нам подобається математика, і в Тотяг мізків - Раунд можна правильно переключитися на голову.





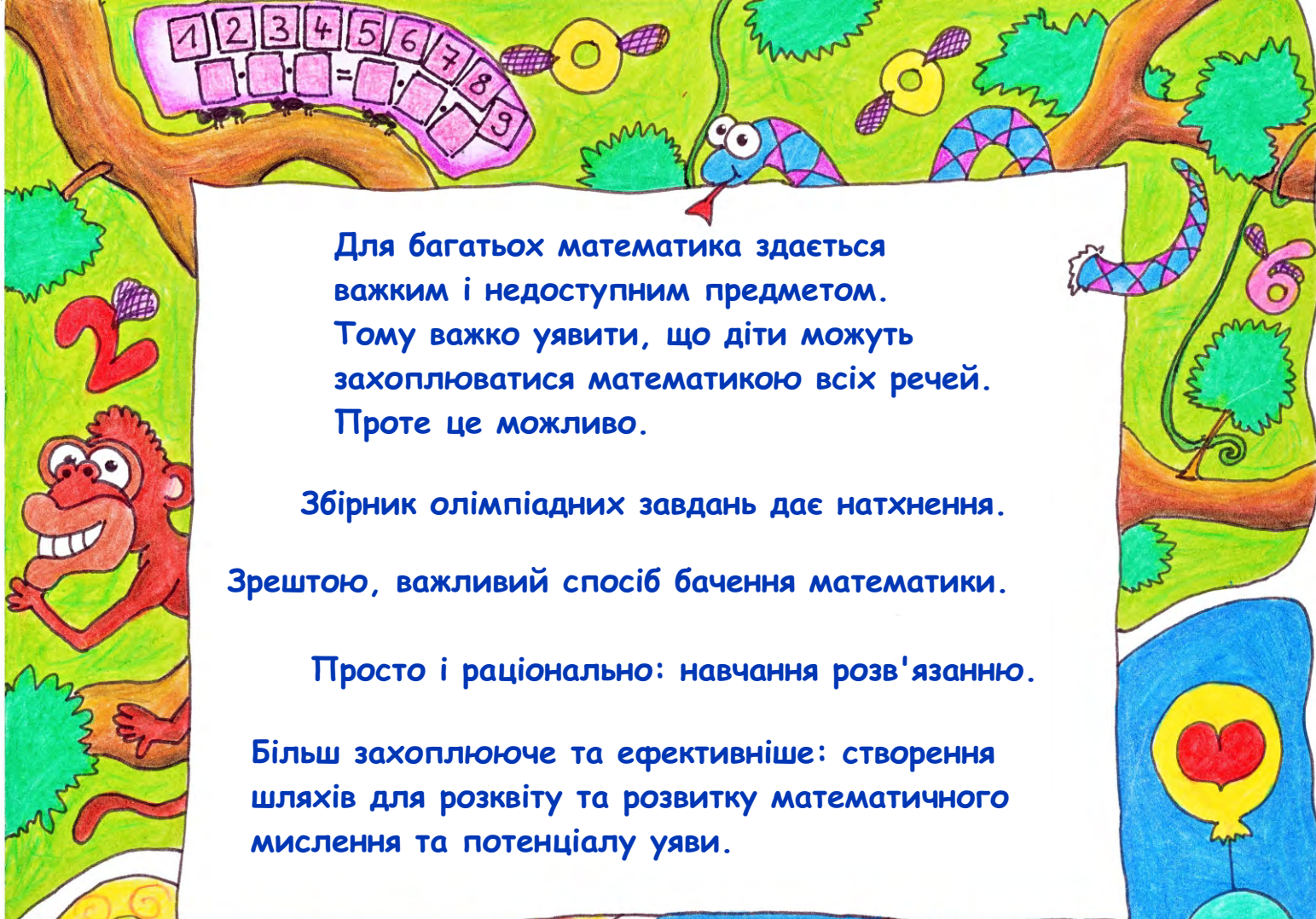
Tanja Meyer  
Bin Müller  
Nina Müller  
Edyta Nowinska  
Katrín Pech  
Marlen Petermann  
Stefanie Petersen  
Lutz Picht  
Stefanie Plagemann  
Gabriele Plietz  
Melanie Ploppa  
Inka-Maria Pohl  
Maren Pötter  
Torsten Pretschner  
Frank Pundsack  
Franziska Quade  
Bianca Raddatz  
Philipp Rahe  
Karen Räsch  
Ina Ricker  
Cornelia Riepe  
Jörg Ritterbusch  
Tina Rohde  
Florian Röhrs  
Anuschka Ruge  
Irina Ruks  
Petra Sandeck  
Diana Schall

Christina Schaper  
Diane Schemme  
Moana Schilberg  
Thomas Schinkowski  
Annedore Schmidt  
Johanna Schmidt  
Kathrin Schnalle  
Stefan Schneider  
Mareike Schnoor  
Britta Schomakers  
Janina Schröder  
Elisabeth Schwank  
Julia Sibbing  
Ina Spreen  
Anna-Luise Strauch  
Kristin Straukamp  
Katharina Tarp  
Anne Theisling  
Irene Thiemann  
Imke Tjaden  
Nadine Träger  
Sophia Varnholt  
Anna-Bianca  
Viebrock  
Julia Vischer  
Alla Vlasenko  
Dirk Vorhold  
Carena Wellmeyer

Anja Wemhoff  
Corinna Wendeln  
Sonja Weßel  
Christine Wiechers  
Maren Wies  
Julia Winckler  
Josephine Windisch  
Kirsten Winkel  
Inga Winkelmann  
Christina Woitschek  
Wera Wortelen  
Philipp Zumdohme  
Janina Zwirner







Для багатьох математика здається  
важким і недоступним предметом.  
Тому важко уявити, що діти можуть  
захоплюватися математикою всіх речей.  
Проте це можливо.

Збірник олімпіадних завдань дає натхнення.  
Зрештою, важливий спосіб бачення математики.

Просто і раціонально: навчання розв'язанню.  
Більш захоплююче та ефективніше: створення  
шляхів для розквіту та розвитку математичного  
мислення та потенціалу уяви.

