



Развитие математических
талантов детей

- сборник олимпиадных задач -

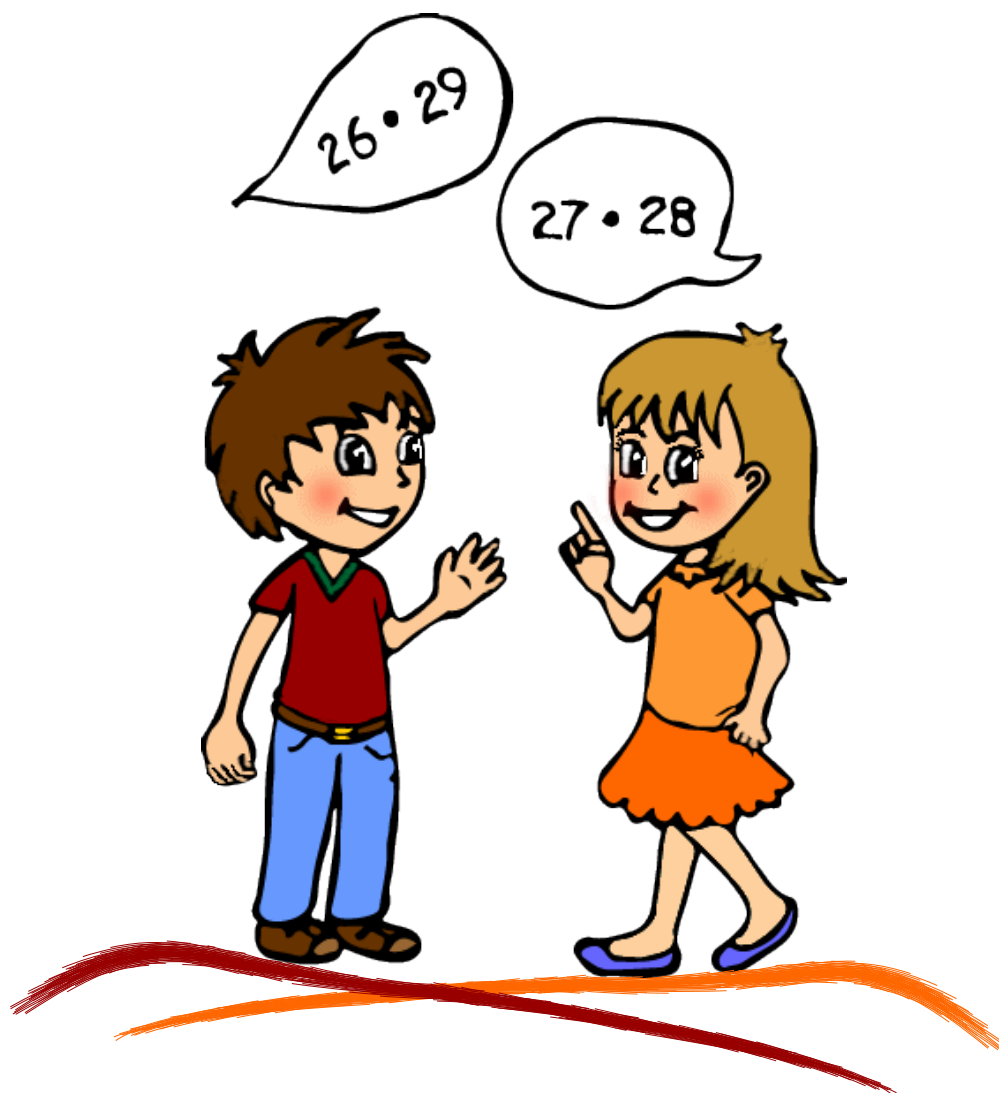
Инге Шванк



Развитие математических талантов детей

- сборник олимпиадных задач -

Инге Шванк





Место встречи «Дошкольное математическое образование»

Научное направление: проф. д-р Инге Шванк

**Шванк Инге
Развитие математических талантов детей
- Сборник олимпиадных задач -**

3. изд. Оснабрюк 2022
Серия публикаций Института исследований дидактики математики , № 42
ISBN 978-3-925386-59-6

**Разработано
Место встречи «Дошкольное математическое образование»**

в сотрудничестве со многими членами МОГ команда 2001-2013 г.р.,
(также смотрите список команд МОГ в конце книги);
Иллюстрации преимущественно Бургис Гомманн - (также обложка), Кристина Шапер и
Элизабет Шванк
Помощь в разработке русской версии, включая перевод: Татьяна Жиленко

Мы благодарны нашему главному спонсору



*Stiftung
Stahlwerk Georgsmarienhütte*

**©Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e. V.
[Институт исследований дидактики математики]
Почтовый ящик 18 47
D-49008 Оснабрюк**

Содержание

Высказывания детей-участников МОГ	I
• об их отношении к математике	
• об их учителях	
А. Введение	VI
Б. Сборник олимпиадных заданий	X
Математическая олимпиада гномов [МОГ] - титульный лист	XIV
Оглавление	XVI
1. Внимательное вычисление	1
2. Загадки с числами и арифметических действий с ними	11
3. Арифметические закономерности	29
4. Операции с выбором	41
5. Текстовые задачи	57
6. Образные модели	87
7. Все хорошо, что хорошо заканчивается	109
В. Перспективы	XVIII
Г. Заключение.....	XXIV
Сертификаты (копии шаблонов)	
Члены команды МОГ	
Отзывы детей МОГ.....	XXXIII
• почему они хотят принять участие	



МОГ

Математическая олимпиада гномов

Вместо вступления

Высказывания детей-участников МОГ об их отношении к математике

Высказывания детей-участников МОГ по поводу своих учителей



МОГ: Математическая олимпиада гномов, конкурс для учащихся 3-х классов города и района Оснабрюк, который проводит «Дошкольное математическое образование» в течение 13 лет совместными усилиями Института когнитивной математики Университета Оснабрюк и Исследовательского института математики и дидактики.

Высказывания детей-участников МОГ

Нам нравится математика...



Das Mathe Spaß macht und es regt die schwarzen Zellen^{an}. Das man denken muss und Knobeln.

Эта математика веселая и стимулирует клетки нашего мозга. Надо думать и ломать голову

aller все

... das man ein schönes Gefühl hat, wenn man eine schwierige Aufgabe gemacht hat.

... нужно решить трудную задачу - приятное ощущение.

- dass man manchmal auf verschiedene Art und Weise zu Lösungen kommen kann,

- иногда можно найти решение разными способами

- все можно делать самостоятельно или в команде

- можно использовать и применять математику каждый день

- dass man alleine oder im Team arbeiten kann,

- dass man Mathe jeden Tag brauchen kann.

Ich finde es total spannend, fast wie ein Detektiv Rätzel und Aufgaben zu lösen.

Я считаю это увлекательным, почти как разгадывание загадок и задач в детективе

Das Kopfrechnen, weil das mich richtig in Schwung bringt, Knobel-Aufgaben dann kann mein Gehirn mal richtig dampfen, und sonst gefällt mir auch alles an der Mathematik.

Ментальная арифметика - это действительно заставляет меня работать, сложные задачи - мой мозг может работать сам, а также мне нравится все в математике.

Mathe ist spannend, abwechslungsreich mit guten Aufgaben. Mathematik braucht man für Leben und für den normalen Alltag. Mathe bietet leichte, mittel und schwierige Aufgaben. Mathe fördert das Gehirn. Und außerdem macht Mathe einfach Spaß.

Математика увлекательна и предлагает много вариантов хороших задач. Математика нужна и для жизни, и для повседневных дел. Математика предлагает легкие, средние и сложные задачи. Математика воспитывает мозг. А также математика - это просто развлечение.

das wir immer etwas Neues lernen. Mathematik ist für das eigene Leben, für die Zukunft und einen guten Beruf wichtig. Dividieren, subtrahieren mal nehmen oder addieren - Rechnen macht natürlich Spaß, wenn du Mathe gerne hast.

Чтобы мы постоянно узнавали что-нибудь новое. Математика важна для жизни, для будущего и для хорошей работы. Конечно, делить, вычитать, умножать и складывать весело, если вам нравится математика.

das es viel Spaß macht. Man kann nicht nur rechnen, sondern auch zeichnen, messen oder etwas wiegen. Ich finde es gut, wenn man verschiedene Rechenwege ausprobieren kann.

Это очень весело. Можно не только решать, но и рисовать, измерять или взвешивать что-либо. Мне нравится, когда можно попробовать разные способы решения чего-то.

das wir immer wieder mit noch mehr und noch größeren Zahlen rechnen können.

мы можем снова и снова считать со всё большими числами.

Die guten Noten, Die schweren Aufgaben (sehr sehr sehr schwer) Beispiel $373 \cdot 591 = 220443$

Хорошие оценки. Сложные задачи (очень, очень, очень, очень сложные и как $373 \cdot 5910220443$)

Есть так много хороших задач

das es so viele schöne Aufgaben gibt.

Потому что математика - это круто

Weil Mathe cool ist



Высказывания детей-участников МОГ

по отношению к своим учителям



Wir finden an Mathematik gut ...

Нам нравится математика...

die Lehrerin. Wir lernen mit Zahlen zu rechnen, damit wir im Leben gut klar kommen.

Учитель. Мы учимся считать с числами, чтобы хорошо ладить в жизни.

Wir finden an Mathematik gut ...

Нам нравится математика...

Ich habe eine tolle Lehrerin und mir macht Mathematik sehr viel Spaß. Ich lerne viele neue Sachen.

Уи меня лучший учитель, и для меня математика очень весела. Я узнал много нового.

Wir möchten an der ZMO-Hirnsportrunde teilnehmen, weil ...

Мы хотим принять участие в МОГ- раунде мозговой тренировки, потому что...

Uns Mathe Spaß macht, weil unsere Klasse recht gut rechnen kann, weil unsere Mathelehrerin uns gut trainiert hat und weil wir es ohne sie gar nicht wüssten.

Нам нравится заниматься математикой, потому что в нашем классе достаточно хорошо считать, потому что учительница математики нас очень хорошо подготовила и без нее мы этого бы не знали.

Wir finden an Mathematik gut ...

Нам нравится математика...

Das der Lehrer so nett ist, das der Unterricht ein bisschen lustig ist, abwechslungsreich.

... Учитель так мил, что на занятиях немного весело и много вариаций.

Wir finden an Mathematik gut ...

Нам нравится математика...

dass unsere Lehrerin dafür sorgt, dass der Unterricht nie langweilig wird und gibt uns immer neue Aufgaben zum rechnen.

Наша учительница заботилась о том, чтобы уроки никогда не были скучными, и она всегда дает нам новые задачи для решения.

Цените математические таланты детей

– Сборник олимпиадных задач –

А. Введение

*В математике есть красота и романтика.
Это не скучное место, математический мир.
Это необыкновенное место; стоит провести там время.
~ Маркус дю Сотуа ~*

Социальное восприятие математики и интерес к ней выходят за рамки простого рассмотрения ее как полезного инструмента для науки и повседневной жизни. В течение длительного периода времени математике приходилось бороться со своей широко распространённой, эмоционально высокой репутацией как сложного и утомительного, но необходимого предмета. Интересно, что в последние годы происходит определенное изменение мнений. Например, Немецкое математическое общество ссылается на репрезентативное исследование, опубликованное в 2010 году, показывающее, что математика занимает второе место среди любимых предметов немецких учеников пятых классов. Кроме того, 68% взрослых, опрошенных в ходе этого исследования, сообщили, что им нравится иметь дело с математическими проблемами в повседневной жизни. Это можно рассматривать как признак изменения точки зрения от пристрастного, отрицательно очерченного мышления к пересмотру математики и удовольствия от нее с открытым и заинтересованным умом. Поскольку наше место встречи для раннего математического образования является заведением, которое в последние десятилетия активно поддерживает интерес детей к математике и развитие математического мышления, мы с большим удовольствием относимся к этому прогрессу. Кроме того, сложное и приятное окончание отражено в высказываниях детей МОГ, участвующих в мероприятиях нашего Пункта встречи (см. высказывания детей в начале и конце этой книги). Как и с любым предметом, интерес к математике, математической компетенции и приятным занятиям в этом отношении могут возникнуть только тогда, когда создаются возможности получить доступ к разнообразному опыту в рамках предмета, желательно в молодом возрасте. Кроме раннего первого, фундаментального развития, мы считаем жизненно важным, чтобы особенно талантливые дети, а также дети с особыми потребностями получали дополнительное внимание и заботу, чтобы построить прочный фундамент математических знаний и поощрять дальнейшее развитие навыков. Особенно развитие

ориентации в числовом пространстве и сильное чувство построения чисел оказалось важной задачей на раннем этапе развития математического мышления (2015). По этому вопросу в течение последних лет (2010, 2013, 2014) на нашем Месте встречи было разработано несколько математических игровых миров, позволяющих вводить математические понятия в игровой, ориентированной на действие манере. О базовом образовании по информатике см. также Динамические лабиринты (2016). Несмотря на то, что наши усилия в этой сфере направлены на поддержку детей с особыми образовательными потребностями (2003), предложений для детей, особенно талантливых в области математики, остается мало. Чтобы помочь восполнить этот пробел, мы положили начало Математической олимпиаде гномов (МОГ) — ежегодный конкурс для математически одаренных учеников 3-х классов, где им предоставляется возможность доказать свои способности и решать сложные математические задачи, соревнуясь с другими талантливыми детьми. В первом году олимпиада была адресована начальной школе Оснабрюк. Из-за большой популярности первого тура в 2001 году радиус был расширен только через год, чтобы охватить начальную школу в округе, в результате чего зона охвата составила примерно 120 начальных школ. Вместе со своим учителем каждый класс-участник может выбрать одну девочку и одного мальчика в качестве представителей класса, чтобы доказать свой талант на олимпиаде. С 2001 по 2013 год в нем приняли участие 2102 ребенка, из них 1063 мальчика и 1039 девочек. Эта небольшая разница в количестве возникла из-за того, что особенно в первые годы школы-отправители считали девочек менее конкурентоспособными, поэтому участвовали только мальчики, но ни одной девочки из класса. С самого начала мы были преданы тому, чтобы мальчики и девочки получали одинаковые возможности, которые, к счастью, с годами становились все более понятными для школ и детей (см. также главу Е. Дальнейшие перспективы). По результатам «Олимпиадного выступления» дети распределяются на 4 группы по статье (бронза, серебро, золото, бриллиант (первые три места) и получают сертификат или в случае первого места занятого мальчиком и девочкой – одного из двух кубков ГМО соревнования. На наш взгляд, эта позитивная презентация математической компетенции детей и удовольствие от нее всегда являлась центральной частью этого проекта. Полученные в конце многочисленные специально разработанные математические задачи и индивидуальные подходы к решению детей участников объединялись и собирались в течение 13 лет и стали основой этой книги. Намерения, связанные с этим, многозначительны. Во-

первых, сборник олимпиадных задач дает педагогам представление о том, как бросить вызов особенно талантливым детям. Во-вторых, в книге продемонстрированы образцовые подходы, которые выбрали дети при решении этих задач. В многогранной работе (Schwank, 2016) будут широко представлены самые удивительные решения задач и детские идеи. Особенности, которые дети привели для получения результата, позволяют глубоко понять стратегии их математического мышления. Сначала эта серия была издана на немецком языке. Тем не менее, может быть интересно и поучительно следить за небольшими математическими начинаниями детей. Кроме того, эти эмпирически разнообразные данные представляют научный интерес, и до сих пор существует немного исследований относительно тематически одаренных детей, эта работа также предлагает практические подсказки относительно того, как работать с различными процессами мышления, которые дети могут использовать в классе или индивидуальной среде, чтобы способствовать целевому продвижению.

Проект такого масштаба и характера стал успешным благодаря преданной работе множества людей. Поэтому мы сердечно благодарим всех, кто присоединился: прежде всего, детям-участникам и их учителям за их мотивацию и энтузиазм.

Кроме того, студенты и сотрудники университета, а также волонтеры за их неутомимую самоотверженную работу. Наконец мы хотим выразить особую благодарность Stiftung Stahlwerk Georgsmarienhutte, чья финансовая поддержка стала существенным вкладом в успех МОГ. Желаем читателям приятного путешествия в математический мир МОГ. Мы надеемся предоставить новое понимание возможностей положительного влияния на понимание детьми математических понятий, структур и процессов, открывая возможности для активного изучения предмета, что не в последнюю очередь ведет к возможностям для дальнейшего усиления энтузиазма к математике.

Инге Шванк

Место встречи «Раннее математическое образование»

Литература

- Kohli, N., Sullivan, A. L., Sadeh, S., & Zopluoglu, C. (2015): Longitudinal mathematics development of students with learning disabilities and students without disabilities: A comparison of linear, quadratic, and piecewise linear mixed effects models. *Journal of school psychology, 53*(2), 105-120.
- Kroesbergen, E. H., & Van Luit, J. E. (2003): Mathematics interventions for children with special educational needs a meta-analysis. *Remedial and special education, 24*(2), 97-114.
- Schwank, I. (2018a): Kinder in ihrem mathematischen Talent wertschätzen. Olympische Aufgabenbearbeitungen. Bd. 1-2. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2018b): Dynamische Labyrinth. Erste Schritte in die Informatik für Kinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2013a): 认识_学的_戏世界-_学的逻辑思维是可以学习的. [Insights into Mathematical Playworlds – Mathematical Logical Thinking Wants to be Learned. German-Chinese Reader.] Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2013b): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster & J.-H. Lorenz (Hg.): *Rechenstörungen bei Kindern. – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik.* 93-138. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Schwank, I. & Schwank, E. (2015): Development of mathematical concepts during early childhood across cultures. In Wright, J. D. (Ed.-in-Chief): *The International Encyclopedia of the Social and Behavioral Sciences, Second Edition.* 772–784.
- Storeygard, J. (2012): *Count Me In! K-5: Including Learners With Special Needs in Mathematics Classrooms.* Thousand Oaks: Corwin Press.

Вебссылки

- Deutsche Mathematiker Vereinigung: Thema: Studie, Mathematik ist das Lieblingsfach der Deutschen. Letzter Aufruf: 28. August 2018:
<https://www.mathematik.de/dmv-blog/65-studie-mathematik-ist-das-lieblingsfach-der-deutschen>

Б. КОЛЛЕКЦИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

*В математике
искусство задавать вопросы
важнее, чем решать.
(In re mathematica
ars proponendi quaestionem
pluris facienda est quam
solvendi.)
~ Георг Кантор ~*

В течение 13 лет Центр встречи для раннего математического образования приглашал математически одаренных учащихся 3-х классов – по одной девочке и одному мальчику из каждого класса-участника – принять участие в раунде «поезд мозга» по Математической олимпиаде гномов (МОГ) и пройти интересные испытания. Математические проблемы, со многими из которых они, вероятно, не столкнулись на обычных уроках по математике в школе. Опыт первых нескольких раундов МОГ показал, что наш критерий отбора – наиболее математически одаренные девочка и мальчик из каждого класса – действительно дал выборку учеников из очень высокими успехами. Это наблюдение согласовывается с недавними выводами, которые указывают на то, что учителя достаточно успешно, часто даже лучше, чем стандартизированные мероприятия, выявляют талантливых с точки зрения математики детей среди своих учащихся (Niederer, Irwin, Irwin&Reilly, 2003; Hodge&Kemp, 2006).

Поэтому перед командой нашего Места встречи была поставлена задача разработать олимпиадные задачи, которые, с одной стороны, были бы достаточно сложными как «эффект потолка». Это проблема, на которую всегда нужно обращать внимание, рассматривая высокую одаренность, независимо от того, в какой конкретной области (Thompson&Subotnik, 2010; Bortz&Doring, 2014) ведется работа. С другой стороны, важна была забота о том, чтобы не перегрузить детей, которые еще находятся на стадии развития своего математического мышления, слишком сложными задачами, учитывая, что одной из важных задач МОГ всегда было повысить удовольствие детей от математики.

Поэтому мы решили намеренно включить некоторые задачи с низкой выборкой, чтобы все участвующие дети имели вдохновляющий опыт успешного решения хотя бы некоторых задач официальной олимпиады по математике, а также для того, чтобы включить достаточное количество задач с высокой выборкой, чтобы иметь возможность верно дифференцировать разные уровни математического таланта среди детей участников. Кроме сложности задач, мы акцентировали внимание на включении

широкого круга математических тем, не только с уроков математики в начальной школе, но и за пределами этого образовательного уровня, чтобы продемонстрировать детям большое разнообразие математических проблем и дать возможность понять стратегии мышления, которые дети могут использовать при решении различных математических задач.

Задания, которые выходят за пределы программы математики начальной школы, были включены для изучения стратегий, которые дети придерживаются, когда они еще не усвоили соответствующих подходов. С одной стороны, это заставляет детей овладеть проблемой с их еще ограниченными знаниями о математическом формализме, например, использовании переменных, терминов и уравнений (за пониманием Kramer 2003, с. 171: формальная математическая запись как усилитель интеллекта), исключительно на основе их умственного привлечения к математическим связям.

С другой стороны, было создано несколько задач, которые позволяли детям сначала исследовать один или несколько приведенных примеров, а затем обобщить сделанные открытия. В заключение, мы хотели бы особо подчеркнуть, что банк задач был разработан не только для того, чтобы представить математические задачи и найти правильное решение, но и чтобы каждый лист с заданием четко и конкретно требовал от детей объяснений мышления и наведения подходов и стратегий, которые они использовали или решили не использовать. Это можно реализовать с помощью расчетных рисунков или разговорной вербализации. Примерами этого могут служить: «Пространство для ваших мыслей и ответов»; «Пространство для объяснения»; «Вычислите»; «Нарисуйте или запишите что-нибудь»; «Объясните свой ответ»; «Посчитайте, нарисуйте или запишите что-нибудь».

По нашему мнению, этот процесс рефлексии имеет первостепенное значение не только для того, чтобы осознать мнения детей, но и для укрепления и закрепления индивидуальной математической обработки путем сознательного осмысления математических операций и их функционирования. Результат нашего многолетнего и многогранного опыта можно увидеть в следующем сборнике 13-летних олимпиадных задач. Для лучшего восприятия задачи отсортированы по темам, вместо того, чтобы представлять сборник отдельных годовых раундов.

Наслаждайтесь чтением!

Литература

- Döring, N., & Bortz, J. (2014): *Forschungsmethoden und Evaluation*. Heidelberg: Springer.
- Hefendehl-Hebeker, L.; & Schwank, I. (2015): *Arithmetik: Leitidee Zahl*. In Bruder, R.; Hefendehl-Hebeker, L.; Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. S. 77-115. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Hodge, K. A., & Kemp, C. R. (2006): *Recognition of Giftedness in the Early Years of School: Perspectives of Teachers, Parents, and Children*. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 164-204.
- Krämer, S. (2003): *„Schriftbildlichkeit“ oder: Über eine (fast) vergessene Dimension der Schrift*. In S. Kramer & H. Bredekamp (Hrsg.), *Bild – Schrift – Zahl*. 157–176. München: Wilhelm Fink.
- Niederer, K., Irwin, R. J., Irwin, K. C., & Reilly, I. L. (2003): *Identification of Mathematically Gifted Children in New Zealand*. *High Ability Studies*, 14(1), 71-84.
- Schwank, I. (2005): *Kinder sind keine Taschenrechner*. Interview. *Gehirn & Geist*. 6/05, 34-37
- Thompson, B. E., & Subotnik, R. F. (Eds.) (2010): *Methodologies for Conducting Research on Giftedness*. Washington, DC: American Psychological Association.



Фамилия и имя _____

Школа _____

Класс _____

Возраст _____

Фамилия, отчество
учителя по математике

Удачи и
успехов!

Содержание

1 Внимательное вычисление	1
Правила сложения и вычитания	
1.1 Как преодолеть ошибки?	
Нахождение, исправление и объяснение ошибок в письменных вычислениях	
1.2 Арифметические стратегии	
Вычисление «Очень рационально» или «менее рационально»	
1.3 Вычисление с неизвестными числами	
Применение известных правил вычислений к неизвестным числам.	
2 Загадки с числами и арифметическими действиями с ними	11
Завершение вычислений и нахождение числа	
2.1 Нахождение пропущенных чисел	
Завершение вычислений путём подстановки соответствующих значений	
2.2 Поиск соответствующих арифметических операций	
Завершение вычислений путём подстановки. Подстановка арифметических операций	
2.3 Загадки со спичками	
Постановка арифметических задач со спичками	
2.4. Распознавание чисел	
Поиск и применение правил в пределах заданных чисел	
3 Арифметические закономерности	29
Выявление арифметических закономерностей в числовых рядах и вычисление числовых выражений	
3. Арифметические закономерности	
Выявление арифметических закономерностей в числовых рядах и вычисление числовых выражений	
3.1 Продолжение числовых последовательностей Выявление и применение закономерностей	
3.2 Специальные дополнительные правила	
Изучение получения результатов по специальным правилам сложения	
3.3 Специальные правила умножения	
Исследование получения результатов по специальным правилам умножения	
4 Операции с выбором	41
Рассмотреть все возможные варианты, определить их количество или выбрать подходящий	
4.1 Поиск правильного местоположения	
Поиск единственно возможного расположения в соответствии с предоставленной информацией	
4.2 Поиск разных вариантов	
Поиск нескольких, не всех возможных	
4.3 Поиск всех вариантов	
Поиск всех возможных вариантов	

Содержание (продолжение)

5	Текстовые задачи	57
	Овладение задачами, сформулированными в текстовой форме с математической точки зрения	
	5.1 Логические стратегии: использование известных фактов для получения новых	
	Не все известно, но математическая логика ведет к ответу	
	5.1.1 Для начала: только одна неизвестная величина	
	5.1.2. Становится труднее: две неизвестные величины	
	5.1.3 Трудно: три или более неизвестных величин	
	5.2 Площадь, тропы и расстояние	
	5.3 Важность временно переплетенных связей	
	Использование временной информации для выяснения ситуаций	
	5.3.1 Чем больше, тем лучше	
	5.3.2 Чем больше, тем больше	
	5.4 Делители и кратные	
	Текстовые задачи на связи произведений	
	5.5 Что, если...	
	Получение общего представления разных сюжетных линий	
6	Образные модели	87
	Логическое дедуктивное размышление на основе образных закономерностей	
	6.1 Распознавание и продление закономерностей Выявление и применение закономерностей	
	6.2 Много квадратов и прямоугольников	
	Знакомство и создание моделей	
	6.3 Вычисление площадей	
	Определение и сравнение площадей представленных фигур	
	6.4 Увеличение масштаба	
	Увеличение фигур на бумаге квадратной формы	
	6.5 Пространственное воображение	
	Обработка пространственных композиций с помощью планарных иллюстраций	
	6.6 С помощью ножниц и бумаги	
	Вырезание фигурок из сложенного листа бумаги	
7	Все хорошо, что хорошо заканчивается	109
	Лабиринты и многое другое	

1 Внимательное вычисление

Правила сложения и вычитания

1.1 Как преодолеть ошибки	3
Нахождение, исправление и объяснение ошибок в письменных вычислениях	
1.2 Арифметические стратегии	6
Вычисление «Очень рационально» или «менее рационально»	
1.3 Вычисление с неизвестными числами	8
Применение известных правил вычислений к неизвестным числам	

1 Вычисли!



$$\begin{array}{r} 384 \\ + 271 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 906 \\ - 371 \\ \hline \end{array}$$

2 Дорогой друг, Кристин, у тебя ошибка!



$$\begin{array}{r} 473 \\ + 364 \\ \hline 109 \end{array}$$

Покажем Кристину, как
правильно складывать:

$$\begin{array}{r} 473 \\ + 364 \\ \hline \end{array}$$

Что Кристин сделал не так?

3 Дорогая Аня, ты тоже совершила ошибку!



$$\begin{array}{r} 905 \\ - 286 \\ \hline 729 \end{array}$$

Покажем Ане, как
вычитать правильно:

$$\begin{array}{r} 905 \\ - 286 \\ \hline \end{array}$$

Что не так сделала Аня?

4 Вычислить пример!



$$\begin{array}{r} 285 \\ + 362 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 807 \\ - 453 \\ \hline \end{array}$$

5 Дорогой друг, Ченг, у тебя ошибка!



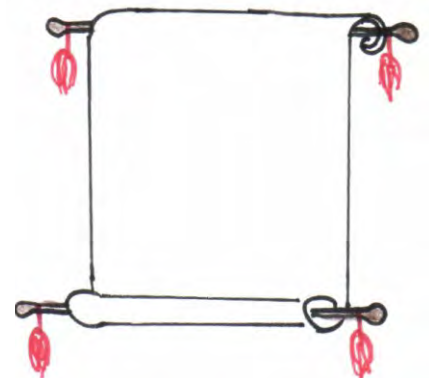
$$\begin{array}{r} 374 \\ + 265 \\ \hline 109 \end{array}$$

Покажем Ченгу, как правильно складывать:

$$\begin{array}{r} 374 \\ + 265 \\ \hline \end{array}$$

Что Ченг сделал неправильно?

Какие еще ошибки возможны при вычислении?



6 Был ли внимателен маленький Шелдон в школе?

Он вычислил:

$$\begin{array}{r} 287 \\ + 423 \\ \hline 600 \end{array}$$



Правильный ли результат Шелдона?

Помоги Шелдону понять, как правильно производить расчеты!
На что должен обращать внимание Шелдон?

① Вычислить рационально!

$$160 + 58 =$$

$$398 + 212 =$$

$$433 + 428 =$$

Как вычислять правильно?



2

Вычислить рационально!

$$127 + 398 =$$



Вычислить нерационально!

$$127 + 398 =$$

Как вычислять рационально?

Как вычислять нерационально?

① Вычислить пример!

$$\begin{array}{r} 232 \\ + 116 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 575 \\ - 142 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \blacksquare 3 \\ - \blacksquare 8 \blacksquare \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92 \blacksquare \\ - 4 \blacksquare 1 \\ \hline \end{array}$$

$$708$$

$$\blacksquare 43$$

② Попробуйте вычислить пример!

$$\begin{array}{r} 359210457 \\ + 271653882 \\ \hline \end{array}$$



На что следует обратить внимание? Почему это важно?

③ Попробуйте вычислить пример!

$$\begin{array}{r} 320 \\ - 520 \\ \hline \end{array}$$



На что следует обратить внимание? Почему это е

Больше места для вычислений!

2 Загадки с числами и арифметическими действиями с ними

Завершение вычислений и нахождение числа

2.1 Нахождение пропущенных чисел 13

Завершение вычислений путём подстановки соответствующих значений

2.2 Поиск соответствующих арифметических операций 21

Завершение вычислений путём подстановки. Подстановка арифметических операций

2.3 Загадки со спичками 24










Постановка арифметических задач со спичками

2.4 Распознавание чисел 25

Поиск и применение правил в пределах заданных чисел

2

В школе джунглей числовые выражения представлены особым образом. Выясните, какая цифра спрятана за каждым из животных?

	−		=	
<input type="text"/>		<input type="text"/>		<input type="text"/>
+		+		+
	−		=	
<input type="text"/>		<input type="text"/>		<input type="text"/>
=		=		=
	−		=	
<input type="text"/>		<input type="text"/>		<input type="text"/>

Объясните, как нашли подходящее число!

4 Вставьте пропущенные числа.

$$\square + \bullet + \blacklozenge + \bullet = 80$$

$$\blacklozenge + \blacklozenge + \blacklozenge + \blacklozenge = 80$$

$$\square + \bullet + \bullet + \bullet = 70$$

$$\square + \square + \square + \bullet = 130$$

$$\blacklozenge + \blacklozenge + \bullet + \square = \square$$

Для вычисления:

Вот как я нашёл свое решение:



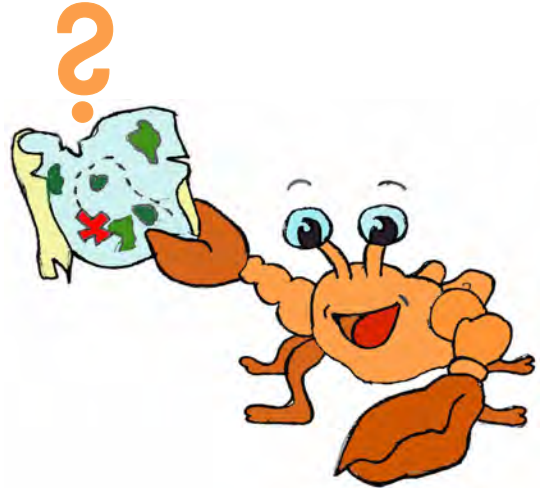
5 У Крабби есть карта сокровищ.

Вот несколько подсказок, как добраться до клада:

$$\heartsuit - \text{шестигранник} = 2$$

$$\heartsuit : \text{трапеция} = 2$$

$$\text{шестигранник} + \heartsuit = 18$$

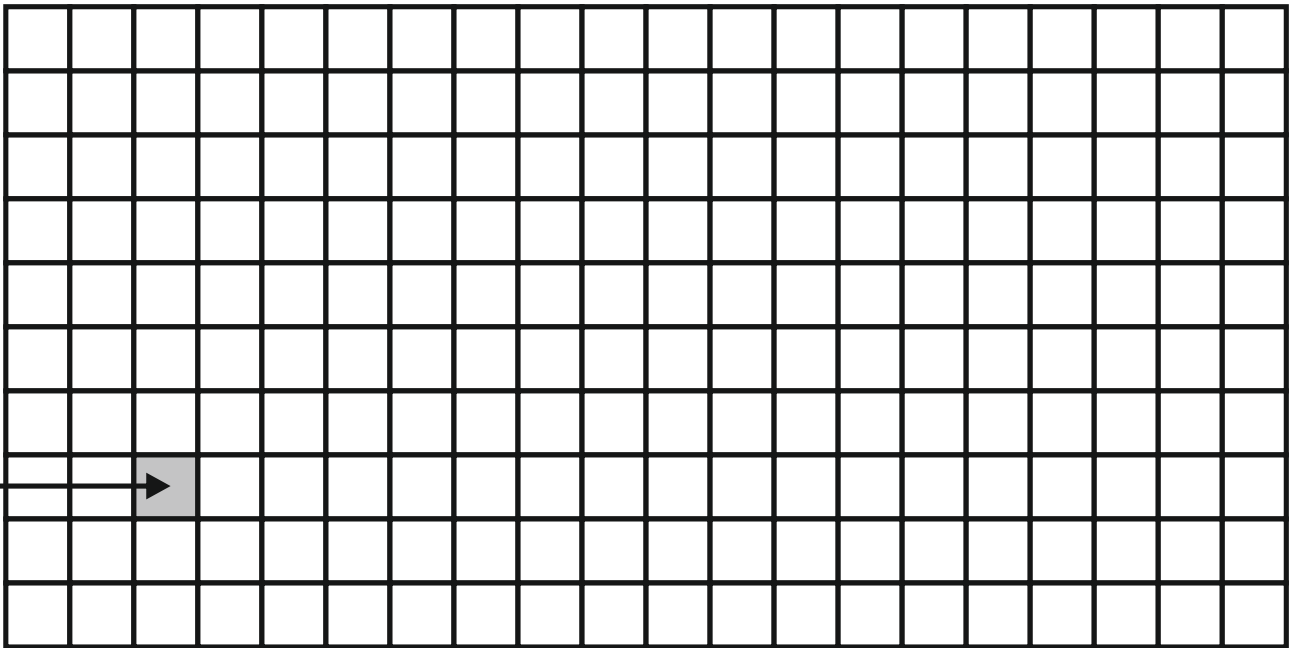


Вот и путь к сокровищу:

от начальной точки пройдите  шагов вправо,

 шагов вверх и  шагов влево.

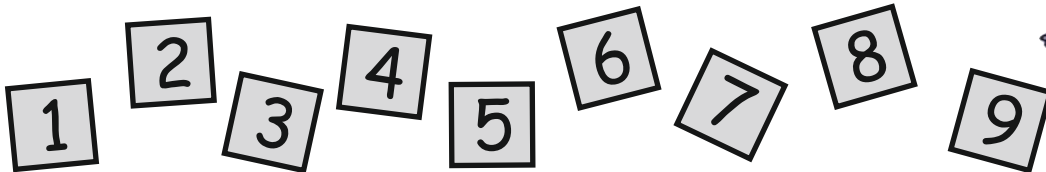
Нарисуйте путь к сокровищу:



Что необходимо сделать, чтобы добраться к кладу?

7

Роберта сделала эти карточки из девяти цифр:



Роберта хочет использовать свои карты, чтобы поместить их в шаблон для правил умножения. Каждая цифра может использоваться только один раз.

Какое правило умножения может использовать Роберта?

$$\square \cdot \square \cdot \square = \square \cdot \square \cdot \square$$

Подскажите Роберте, как она может найти решение!

Для вычисления:

Могла ли Роберта использовать карточку 0 для своей задачи?

8 Сложное числовое задание Тифани.

Тифани придумала два числа. Затем она записала действие для этих двух чисел.

$$\blacksquare - \blacklozenge = 2$$

Какие числа могла придумать Тифани?
Объясните свой ответ!



Тифани добавляет еще одно действие для двух своих чисел.
Оба расчета должны быть правильными для ее чисел.
Осторожно: прежде чем вычислить выражение с вычитанием во втором выражении, сначала нужно выполнить действие умножения.

$$\blacksquare - \blacklozenge = 2$$

$$\blacksquare \cdot \blacksquare - \blacklozenge \cdot \blacklozenge = 20$$

Можете точно сказать, какие числа задумала Тифани? Объясните ответ!

- ① Лили любит играть с цифрами.
 Она любит считать. Сегодня она размышляет:
 «Как я могу получить ноль в результате вычисления?»
 Как вы думаете? Объясните свое мнение!



Лили хочет выполнить следующий расчет,
 используя только плюс и минус.

$$\boxed{5} \diamond \boxed{4} \diamond \boxed{3} \diamond \boxed{2} \diamond \boxed{1} \diamond \boxed{=} \boxed{0}$$

Это возможно? Обоснуйте свой ответ!



3 Ева любит создавать математические деревья. На этой странице вы можете увидеть ее решение для дерева с конечным результатом **7**. Она соединяет листики арифметическими знаками или использует их для нового числа. Она продолжает, пока не будут образованы все листики. Ветви не могут скрещиваться, а порядок листиков нельзя изменять. Прodelайте это с другими деревьями. Дерево с конечным результатом **3** - очень легко!

1 2 3 4 5 6

1+2=3

34

3+34=37

37+5=42

42:6= **7**

7

1 2

3

1 2 3

4

1 2 3 4

5

1 2 3 4 5

6

- ① Мэри любит играть со спичками. Она выкладывает следующее выражение:

$$3 + 6 = 9$$



Мэри замечает: «Если я изменю позицию только одной спички, я получу новый правильный результат!»

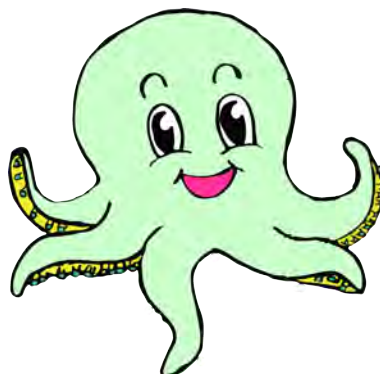
представьте новое выражение Мэри.

1

Краки любит играть с цифрами.

Сегодня она написала цифры на ракушках и положила эти ракушки на дно моря.

2	3	5
5	1	4
3	6	1

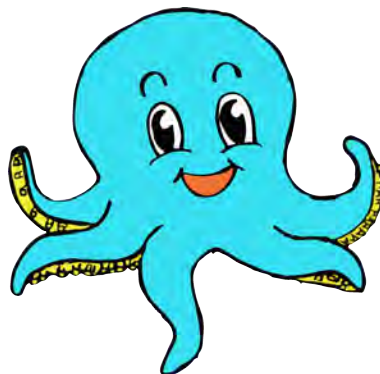


Укладывая ракушки на песок, Краки что-то задумала.

Что это могло быть? Каким правилом она могла пользоваться?

Друг Краки тоже представляет свой вариант выражения.

1	2	6
5	4	0
3	3	3



Он утверждает: "Мое правило подходит к обоим вариантам".

Трав ли друг Краки? Есть ли правило, подходящее для двух вариантов?

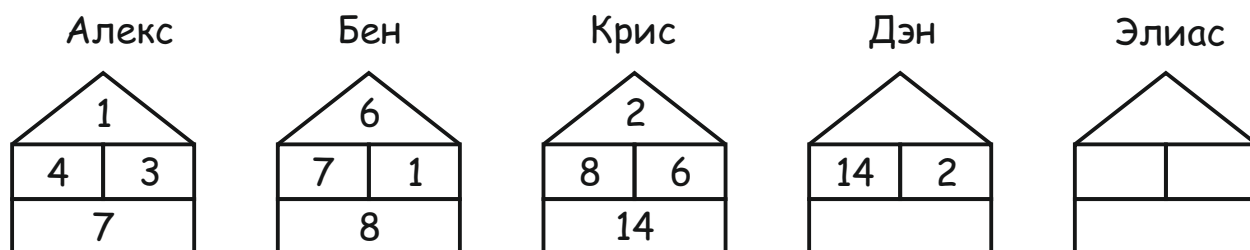
2

Алекс, Бен, Крис, Дэн и Элиас живут в стране Али.

На этой неделе они хотят украсить свои дома цифрами.

Алекс, Бен и Крис уже закончили.

Вставьте цифры для Дэна и Элиаса.



Какое правило могли использовать ребята для украшения домов цифрами? Возможны несколько вариантов!

Дополнительное место для вычислений.

3 Арифметические закономерности

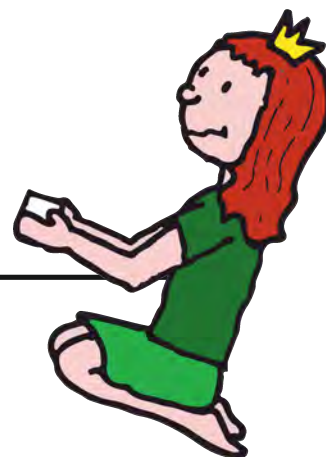
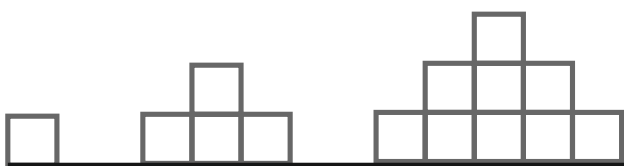
Выявление арифметических закономерностей в числовых рядах и вычисление числовых выражений

3.1 Продолжение числовых последовательностей 31
Выявление и применение закономерностей

3.2 Специальные дополнительные правила 35
Изучение получения результатов по специальным правилам сложения

3.3 Специальные правила умножения 37
Исследование получения результатов по специальным правилам умножения

1 Принцесса Миа любит играть с плиточками и выполнять арифметические комбинации. Сегодня она выкладывает ряд плиточек так:

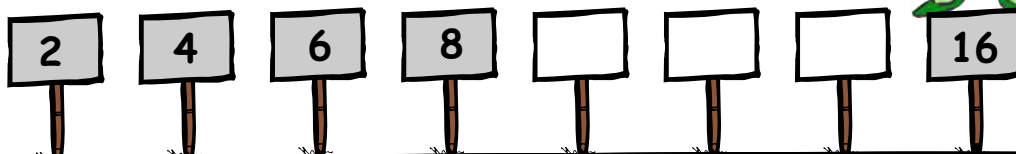


Как идет процесс дальше?
Как могла размышлять Миа?

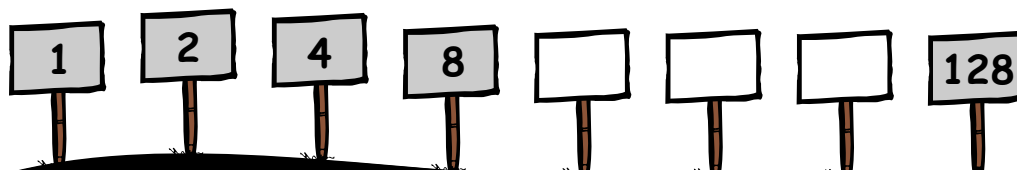
A large, empty rectangular box with a thin grey border, intended for the student to write their answer to the questions above.

2 Ведьма сказочной страны заколдовала некоторые числа.

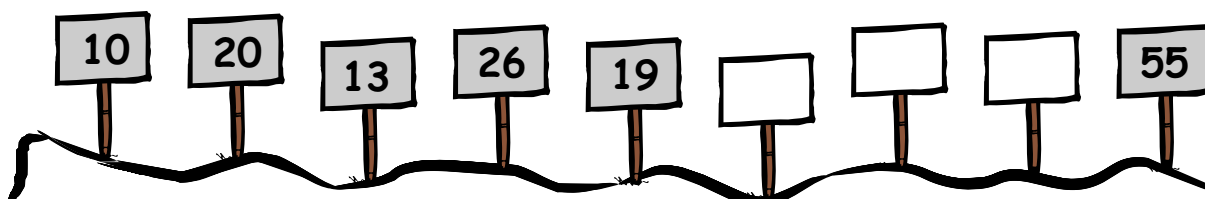
Помогите жителям сказочной страны восстановить свои красивые выражения!



Внимательно подумайте и впишите числа в пустые ячейки.
Почему ваши числа подходят?



Внимательно подумайте и впишите числа в пустые ячейки.
Почему ваши числа подходят?



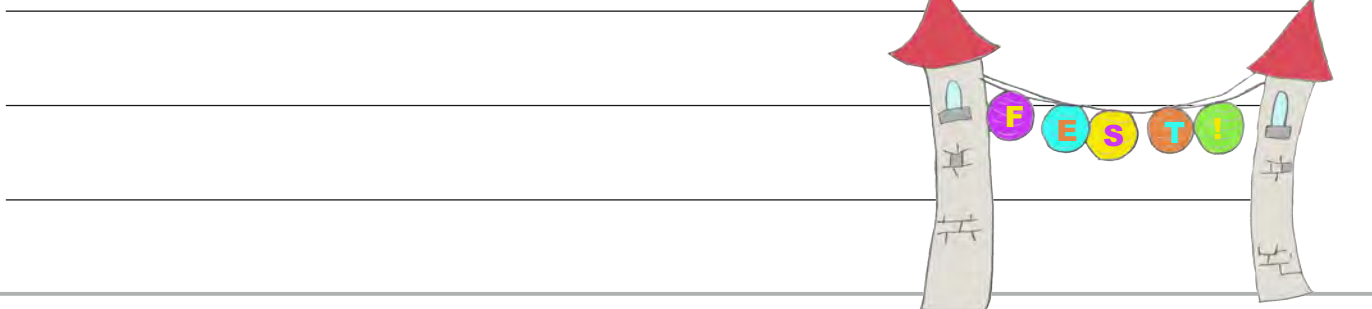
Внимательно подумайте и впишите числа в пустые ячейки.
Почему ваши числа подходят?

3 Дети замка любят цифры.

Продолжите ряд первой гирлянды.



Найти следующие числа легко, потому что:



Продлите ряд второй гирлянды.



Найти следующие числа легко, потому что:

Продлите ряд третьей гирлянды.



Найти следующие числа легко, потому что:

4

Лиза любит числа. Ей нравится писать их строчками. Продолжайте!

Первый ряд Лизы:

4, 8, 12, 16, , ,

Лиза думает: я могу легко вычислить следующее значение, потому что:

Второй ряд Лизы:

2, 4, 8, 16, , ,

Лиза думает: я могу легко вычислить следующее значение, потому что:

Третий ряд Лизы:

1, 4, 9, 16, , ,

Лиза думает: я могу легко вычислить следующее значение, потому что:

Лиза размышляет: 4 и 16 появляются во всех трех строчках. Есть ли другие числа во всех трех строчках? Какие это числа?



① Лара придумала несколько числовых выражений. Найдите их.

$$2 + 3 + 4 =$$

$$4 + 5 + 6 =$$

$$6 + 7 + 8 =$$

$$2 \ 1 + 2 \ 2 + 2 \ 3 =$$



Лара придумала особенные числовые выражения.
Как она выбирала свои числа?

Лара подмечает, что результаты ее выражений с числами особенные.
Что особенного в ее результатах?

Почему числа результатов становятся такими особенными? Работает ли это с большим количеством этих числовых выражений?

1

Вычислить:	$2 \cdot 3 =$	$1 \cdot 4 =$
	$3 \cdot 4 =$	$2 \cdot 5 =$
	$4 \cdot 5 =$	$3 \cdot 6 =$
Продолжение:		

Что вы заметили?

Иви знает, что значением выражения $27 \cdot 28$ будет 756.
 Финли радуется. Он нашел значение выражения $26 \cdot 29$.

Как вычислил Финли? Чему он радуется?

2

Тэм хочет применить специальные правила сложения.
Она начинает с того, что пишет **42** как свое первое число.
Затем она меняет цифры и пишет: **24**.
Она прибавляет эти два числа: **42+24**.
В результате она получает:



Тэм снова пишет число: **53**.
Затем она меняет местами цифры и пишет: **35**.
И снова прибавляет два числа: **53+35**.
Результатом вычислений является:

Чем замечателен результаты Тэм?

Тэм размышляет: «Если я начну с любого другого числа от **10** до **99**,
всегда ли я получу особый результат со своим дополнительным
свойством?»

Что вы думаете?

Немного места для ваших мыслей и ответов:

2 Любимые числа Марти: 4, 9, 16, 25, 36,
 Чем замечательны любимые числа Марти?

Напишите еще три любимых числа Марти:



Марти часто хочет использовать свои любимые числа. Когда он должен вычислить $3 \cdot 5$, вместо этого вычисляет $4 \cdot 4$ и вычитает 1 из результата. Вычисляй, как Марти, и продолжай заполнять таблицу!

Задача	Метод вычисления Марти		Результат
$3 \cdot 5$	$4 \cdot 4 = 16$	$16 - 1 = \square$	$3 \cdot 5 = \square$
$4 \cdot 6$	$5 \cdot 5 = \square$	$\square - 1 = \square$	$4 \cdot 6 = \square$
$7 \cdot 9$	$\square \cdot \square = \square$	$\square - 1 = \square$	$7 \cdot 9 = \square$

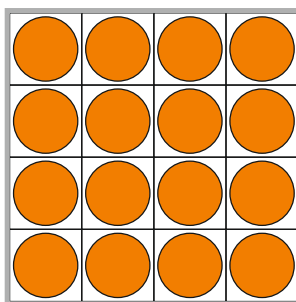
Почему метод Марти всегда приводит к правильному результату? Вы можете продемонстрировать свои мысли другими методами: на числовом ряду или цепи вычислений, или с помощью модели массива. Делайте как хотите!

Немного места для ваших мыслей и ответов:

3

Катон особенно любит вычисление с узорами.

Он считает этот шаблон отличным:



Катон объясняет: «Узор мешает мне. В шаблоне я вижу, что $4 \cdot 4$ — то же, что $3 \cdot 5 + 1$ ».

Правильный ли метод вычисления Катона? Объясните!

Катон гордится: «С моим трюком с шаблоном я могу очень хорошо использовать соседние числа для вычислений».

Запишите числовые выражения с соседними числами так же, как Катон.

$$3 \cdot 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 \cdot 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6 \cdot 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Может ли Катон использовать свой шаблонный прием для всех выражений на умножение с двумя одинаковыми числами и соседями? Объясните! Вы также можете что-нибудь изобразить.

4 Операции с выбором

Рассмотреть все возможные варианты,
определить их количество или выбрать
подходящий

4.1 Поиск правильного местоположения 43

Поиск единственно возможного расположения в соответствии с
предоставленной информацией

4.2 Поиск разных вариантов 49

Поиск нескольких, не всех возможных

4.3 Поиск всех вариантов 50

Поиск всех возможных вариантов

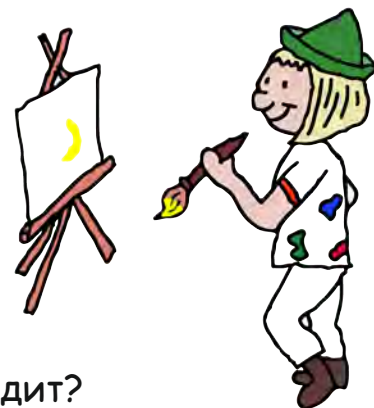
- 1 Перед тем как начать рисовать, художница Петти любит готовить планы. Для новой картины она выбрала голубой, красный и желтый цвета. Закончите ее узор.

Г	Ж	
К	Г	
Ж	К	

г: голубой

к: красный

ж: желтый



Почему способ, которым вы закончили узор, подходит?

Петти изобретает другой узор с четырьмя цветами.

Г	З		
К	Г		
Ж	К		
З	Ж		

г: голубой

з: зеленый

к: красный

ж: желтый



Петти задается вопросом, какие варианты у нее могут быть, чтобы продлить таблицу. Дайте ей подсказку! Какой цвет вписывается в поле, указанное стрелочкой? Объясните свой ответ!

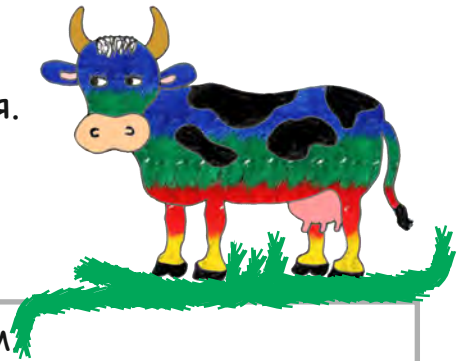
2 Сегодня фермер Колин взвешивает своих коров. Он отмечает:

Люси легче Эрики.

Гарриет весит на 5 кг больше, чем Глория.

Эрика весит на 3 кг больше, чем Глория.

Глория весит меньше Люси.



Расположите коров в соответствии с их весом.
Напишите или нарисуйте свой результат.

Какая корова самая легкая? _____

Какая самая тяжелая корова? _____

3

Фрэнк, Оуэн, Яков, Тина, Ева и Лили - друзья. Сегодня они вместе едут в автобусе. К счастью, они нашли себе три двойных места.

Фрэнк сидит перед Тиной и позади Оуэна
Яков сидит рядом с Тиной.

Лили сидит рядом с Оуэном и перед Яковом.



Узнайте, с кем могут сидеть рядом дети в автобусе. Если вы хотите, то можете разместить их в полях с местами ниже. После этого запишите свое решение.

Для размещения

Сидение	Сидение
Сидение	Сидение
Сидение	Сидение

Для написания

Сидение	Сидение
Сидение	Сидение
Сидение	Сидение

Опишите сидящих рядом и позади Евы.
Объясните ответ.

4

Снова почтальон Каспер доставляет письма в монастырь.

Что именно он помнит о поселении:

Иосиф живет слева от Симона.

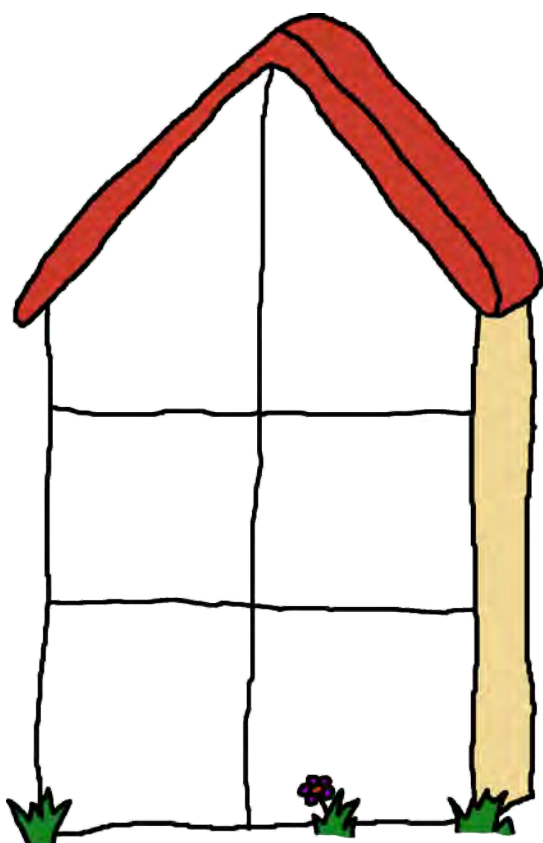
Аарон живет справа от Фредди.

Джозеф живет выше Фредди.

Саймон живет ниже Мартина.

Ни Мартин, ни Иосиф не живут на правой стороне.

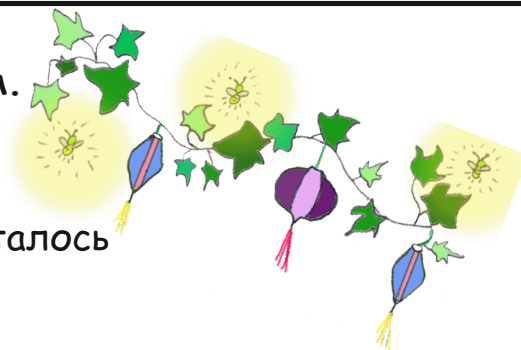
К сожалению, он ничего не помнит о Брайане.



Помогите почтальону и
заполните имена в доме!

Где живет Брайан? Обоснуйте свой ответ!

- 5 Фея Фиона устраивает вечеринку со своими друзьями. Все они сидят за круглым столом. Сама Фиона сидит между Бекки и Энни. Лаури сидит напротив нее. Грейс сидит слева от Лаури. Энни сидит напротив Грейс. Мэйзи осталось одно место. Где она сидит?



Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь. Объясните!

6

У маленького Никса три шляпы:

фетровая, соломенная и кожаная.

Одна шляпа красная, одна шляпа синая, одна шляпа зеленая.

Одна шляпа имеет одно перо, одна шляпа с двумя перышками, а одна шляпа - с тремя перышками.

Загадка о шляпах от Никса для вас:

- Моя шляпа с одним перышком не зеленая.
- Моя фетровая шляпа не красная и имеет на одно перо меньше, чем кожаная шляпа.
- Моя синяя шляпа с тремя перышками.
- В моей кожаной шляпе нет двух перышек.

Узнайте, сколько перышек украшает каждую шляпку.

Объясните ответы! Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.



1 Бенджамин хочет купить себе мороженое за 1,71 €.

В его кошельке есть разные монеты:

три монеты по 1 €,
 три монеты по 50 центов,
 три монеты по 20 центов,
 три монеты по 10 центов,
 три монеты по 5 центов,
 три монеты по 2 цента.



Назовите пять разных вариантов, чтобы Бенджамин заплатил за мороженое точной суммой денег. Использование одних и тех же монет только в другом порядке не засчитывается.

1-й вариант: _____

2-й вариант: _____



3-й вариант: _____

4-й вариант: _____

5-й вариант: _____

В чем заключался ваш подход поиска решения?













1 Питер скучает. Он бросает два кубика и подсчитывает очки.

Первый раз бросает   прибавляет 8 баллов.

Какое наименьшее количество очков можно получить за 2 кубика? _____

Какое наибольшее количество очков можно получить за 2 кубика? _____

Заполните таблицу всеми возможными суммами баллов:

						
	2	3				
	3					
						
						
						
						

Питер продолжает бросать кубики очень долго. В общей сложности он бросает их более 1000 раз! Какое количество очков он, вероятно, получал чаще всего? Объясните свой ответ!

2

Во второй половине дня проводится выставка собак, Ари, Бла и Кос. Сначала каждый из них сидит на одной из трех разных коробок.



Во время представления их задача - менять места снова и снова по-новому. Конечно, это работает лишь некоторое время.

Какие разные варианты для Ари, Бла и Коса, чтобы выбрать коробку?

Как Ари, Бла и Кос могут сидеть:

В общем, Ари, Бла и Кос имеют ____ разных варианта.

Что нужно сохранить, чтобы найти все варианты?

3 Ким и Кен изобретают новые слова. Эти слова имеют 4 буквы и пишутся только с буквами **a, e, n** и **g**. Последняя буква всегда - это **n** или **g**, и каждая буква появляется только один раз в каждом слове. Ким начинает и пишет: **aeng**. Кен говорит: "Мы сможем изобрести много-много слов! Конечно, больше 100".



Узнай, сколько на самом деле слов!
Запишите все слова.

Есть _____ возможных слов.

Объясните, почему Ким и Кен не могут найти много слов, используя свои правила.

- 4 У русалки Никси гардероб полон лент.
У нее есть ленты пяти разных цветов: красная,
синяя, зеленая, оранжевая и фиолетовая.

Ежедневно она носит три ленты трех разных
цветов. Сколько разных нарядов она может собрать?



Объясните свой ответ! Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

5

Гном Баку задается вопросом, что он может надеть на вечеринку.

У него четыре разных свитера, одна пара красных, одна пара синих и одна пара желтых штанов, а также две разные остроконечные шляпы.

Гном Баку непременно хочет надеть один свитер, одну пару брюк и одну острую шляпу.

Для этого у него много вариантов.

Сколько их именно?



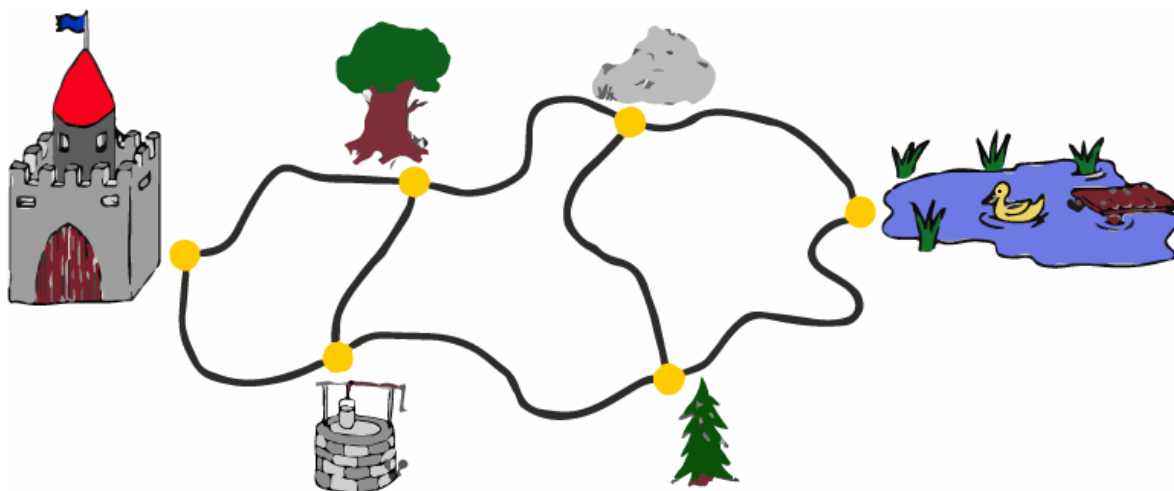
Объясните свой ответ!

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

6

Волшебный принц любит ездить по разным тропам.

У него есть несколько вариантов добраться от замка до озера.



Волшебный принц задается вопросом:

сколько у меня есть вариантов проехать от замка к озеру? Я не хочу использовать ни один путь дважды во время езды.

У волшебного принца есть _____ вариантов.

Объясните свой ответ!

Вы можете использовать рисунок с контурами для объяснения.

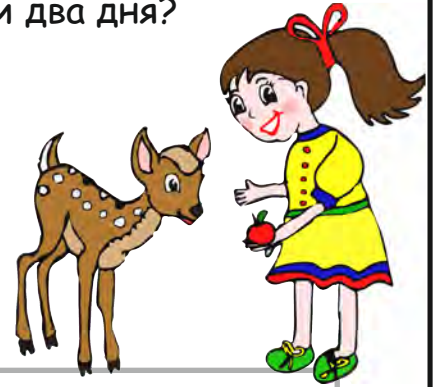
5 Текстовые задачи

Овладение задачами, сформулированными в текстовой форме с математической точки зрения

5.1 Логические стратегии: использование известных фактов для получения новых.	59
Не все известно, но математическая логика ведет к ответу	
5.1.1 Для начала: только одна неизвестная величина	59
5.1.2 Становится труднее: две неизвестные величины	62
5.1.3 Трудно: три или более неизвестных величин	68
5.2 Площадь, тропы и расстояние	73
5.3 Важность временно переплетенных связей	78
Использование временной информации для выяснения ситуаций	
5.3.1 Чем больше, тем лучше	78
5.3.2 Чем больше, тем больше	81
5.4 Делители и кратные	82
Текстовые задачи на связи произведений	
5.5 Что, если	82
Получение общего представления разных сюжетных линий	

2 Каждый день Лиззи кормит своего Бемби одинаковым количеством печенья. В течение пяти дней Лиззи нуждается в 30 штуках печенья. Сколько печенья понадобится, чтобы кормить Бэмби два дня?

Ответ: _____



Решение!

Вы можете вычислять, рисовать или писать.

3

На большом дереве в джунглях сидит много птиц вместе со своим предводителем Логи. На соседнем дереве сидят два шимпанзе Па и Пу. Па зовет птиц: «Привет вам, 200 птиц!» Логи отвечает: Нас не так много. Но если прибавить к нам двойное наше число и также вас двоих прибавить, то нас будет 200 на этом дереве».



Сколько птиц сидит на дереве? _____

Немного места для ваших мыслей.
Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

1 Сколько лет двум гоблинам?



Возраст: лет

Нам вместе 40 лет.

Я старше тебя на 30 лет!



Возраст: лет

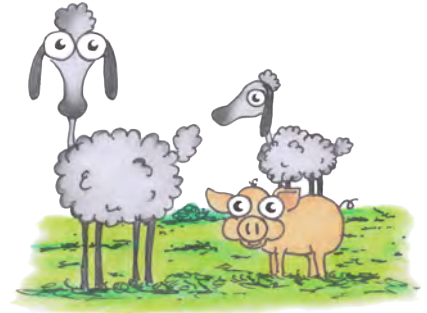
Объясните свой ответ!

Вы можете вычислять, рисовать и писать.

- 2 У Тони есть овцы и свиньи. У его сестры Мэри также есть овцы и свиньи. Всего у них есть 30 животных. Фрэнк подходит и говорит: «Это интересно. У Мэри столько животных, сколько ног у животных Тони».

Сколько животных у Тони? _____

Сколько животных у Мэри? _____



Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

3

Фермер продает пять овец своей соседке.
За каждую бурую овцу он получает 104 евро.
За каждую белую овцу - на 15 евро больше.
Соседка дает ему 570 евро за пять овец.

Сколько фермер продал белых овец?



Немного места для ваших мыслей.
Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

4 В отеле «Школа рыб» 32 спальни
и 57 спальных мест.

В спальнях есть либо две кровати, либо только одна кровать.

Сколько может быть спален с одной кроватью? _____

Сколько может быть спален с двумя кроватями? _____

Немного места для ваших мыслей. Вычислите,
нарисуйте или запишите что-нибудь.



Спальня с одной кроватью стоит 23 евро за ночь.

Спальня с двумя кроватями стоит 30 евро за ночь.

Семья и друзья Фикси платят 305 евро за ночь.

Сколько номеров с одной кроватью они могут забронировать? _____

Сколько номеров с двумя кроватями они могут забронировать? _____

Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

5

Джоли хочет продать кокосы на рынке.

Треjder любит считать.

Она выставила два ценника:

6 светлых и 8 чёрных кокосов стоят 18 евро.

9 светлых и 4 темных кокоса стоят 15 евро.

У Джоли совсем немного денег.

Она может купить только 1 светлый и 1 темный кокос.

Сколько она должна заплатить?



Джоли должна заплатить ____ евро.

Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

6

На празднике Фея Нора покупает себе и своим помощникам две жареные колбаски и шесть стаканов яблочного сока. В общей сложности она платит 12,60 евро. Две жареные колбаски стоят ровно столько, сколько три стакана яблочного сока.



Сколько стоит одна жареная колбаса? _____

Сколько стоит один стакан яблочного сока? _____

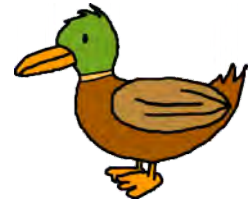
Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

1



Кролик в ящике весит 4 кг.
Утка в этом же ящике весит 5 кг.
Всего утка и кролик весят 3 кг.
Сколько весит ящик?



Ответ: _____

Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

2 Девушка из замка Айви любит длительные пешие прогулки.

На прошлой неделе она преодолела общую дистанцию в 48 км за три дня.

В среду она прошла в два раза больше, чем в понедельник.

В пятницу она прошла в три раза больше, чем в понедельник.

Какое расстояние она преодолела за эти дни?



Понедельник: _____

Среда: _____

Пятница: _____

Объясните свой ответ! Вы можете вычислять, рисовать и писать.

3

Ута описывает:

«На моей дачной ферме водятся разные виды животных. Всего 104 животных.

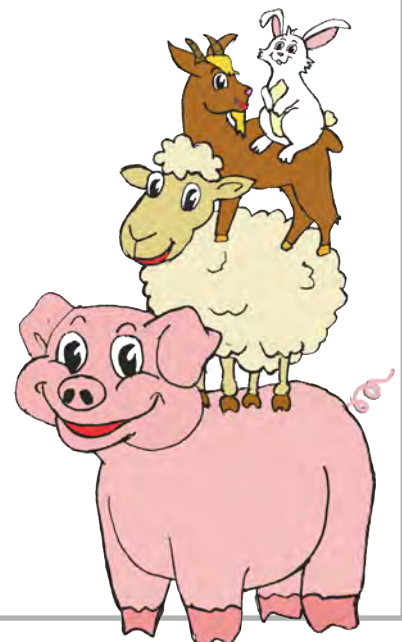
Количество овец и свиней одинаково.

Кроликов на два больше чем коз. И свиней на одну меньше, чем коз».

Сколько овец, свиней, кроликов и коз в Уты?

Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.



4 Сегодня повар покупает фрукты: один мешок яблок, один мешок груш и один мешок апельсин. Один мешок яблок стоит столько же, сколько один мешок груш. Один мешок апельсин стоит на 10 талеров больше, чем два мешка яблок. В общей сложности он должен заплатить 26 талеров.

Сколько стоит один мешок апельсин?

За один мешок апельсин ему придется заплатить _____.



Объясните свой ответ! Вы можете вычислять, рисовать и писать.

1 Участок земли хотят отделить новым забором.

Длина земельного участка 84 м, ширина 60 м. Для двух одинаковых ворот нужно оставить свободное место.

Одни ворота имеют ширину 4 м.

Сколько метров материала нужно для забора?

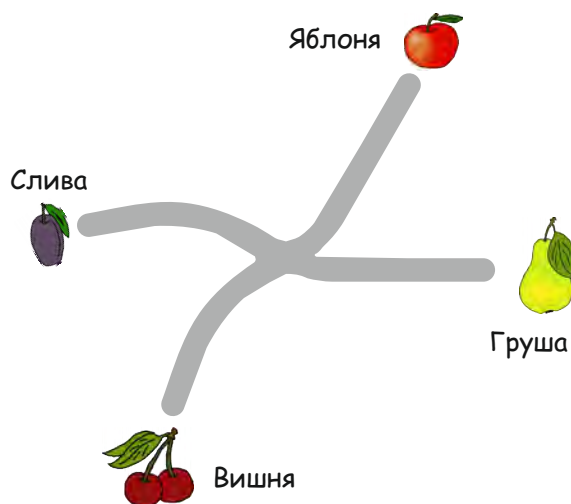


Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

2

Бабушка Лавр посадила в своем саду 4 дерева. Между ними есть несколько троп. Каждый вечер она гуляет по этим тропам. Она идет от яблони к груше, это 10 м. Она продолжает уходить от груши к вишне, это 6 м. Далее она переходит от вишни к сливе, это 14 м. Впоследствии она переходит от сливы к яблоне.



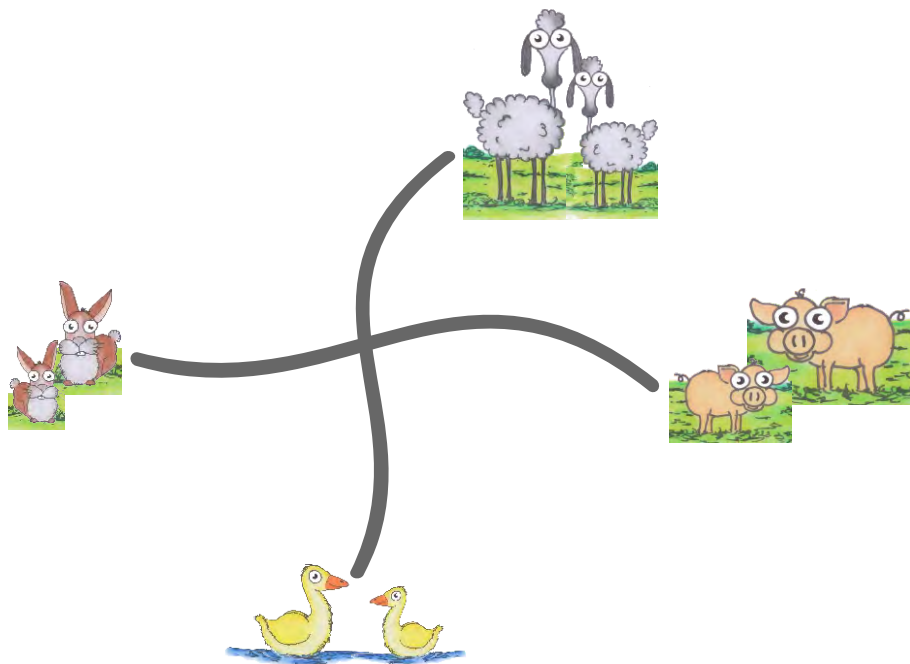
Бабушка Лавр думает: "Идти от сливы к яблоне дольше, чем от груши к вишне". Она права?

Объясните! _____

Если идти прямо от сливы к яблоне, сколько метров преодолет старушка Лавр? Вычислить.



- 3 Близнецы Тина и Зина готовятся к спортивному празднику. Они изобразили эскиз своего маршрута.

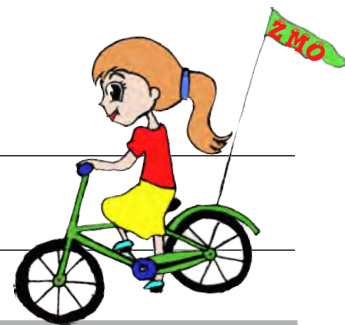


Тина предлагает: «Начинаем с кроликов и бежим 120 м к овцам. Затем бежим 140 м. к свиньям. Потом 100 м к уткам и, наконец, возвращаемся к кроликам». Зина соглашается: «Отлично, тогда последний отрезок самый короткий».

Правы ли Зина? Какой длины путь от уток к кроликам? Объясните свой ответ! Также можно использовать эскиз.

4

Майкл и Панси ходят в одну школу. Майкл живет в 3 км от школы, Панси в 4 км. После обеда Панси хочет поехать на велосипеде к Майклу. Какое расстояние может быть? Есть несколько вариантов.



Хорошо подумай и нарисуй:

Вот как я нашел свой результат:

5

Сью и Ларри друзья. Они ходят в одну начальную школу. Сью живет в 2 км от школы, Ларри - в 3 км. Днем часто встречаются. Сегодня Ларри хочет съездить на велосипеде от своего дома к дому Сью. Он выбирает кратчайший путь. Какой длиной может быть его путь?
Осторожно: есть несколько вариантов.



Немного места для ваших мыслей и ответов:

Почему существует так много возможностей нахождения кратчайшего маршрута Ларри?

① **Морской конек Турбо-Фред хочет посетить водяного Макса.**
Сейчас 10 часов, а Турбо-Фреду еще 20 метров
нужно доплыть.

Он думает: Мне нужно 14 минут, чтобы проплыть
2 м. Перерыва у меня больше не будет.
Поэтому я прибуду в _____ часов».

Объясните ответ.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.



На самом деле он встречается с Максом раньше, потому что Макс поплыл
в 10 часов, чтобы встретить его по дороге. Макс может проплыть 3 м за
14 минут. В какое время они встретятся? _____

Объясните ответ. Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

2

Гномы Геви, Гефу и Гезе хотят завернуть подарки для своей вечеринки.

Геви удастся завернуть четыре подарка в час.

Гефу удастся завернуть пять подарков в час.

Гезе удастся завернуть шесть подарков в час.

Сегодня Геви тайно встал раньше. Он уже упаковал восемь подарков, когда Гефу и Гезе тоже начали заворачивать.

Гефу хвастается: «Я догоню Геви за два часа!»

Гезе отвечает: «Нет, я догоню Геви за два часа!»

Что ты думаешь?

Когда Гефу догонит Геви, а когда - Гезе?

Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.



3

Али, Беа и Серо изготавливают тарелки из глины. Али может изготовить 4 тарелки в час. Беа может изготовить 5 тарелок в час. Серо может изготовить 6 тарелок в час. Сегодня Али тайно встал раньше. Он уже изготовил 8 тарелок, когда Беа и Серо начали свою работу.



Беа хвастается: «Через два часа я вас догоню!»

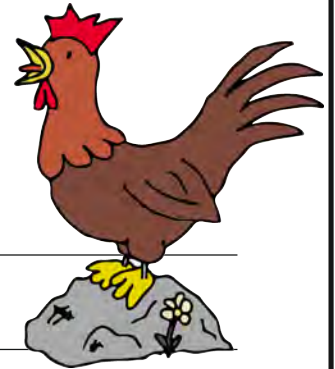
Серо противоречит: «Этого не может быть! Все равно я первым догоню Али».

Кто прав? Сколько часов понадобится Беа и Серо в отдельности, чтобы догнать Али?

Немного места для ваших мыслей.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

1 **Вставать тяжело!** В своем общежитии рыцари используют такой метод: все проснувшиеся рыцари обходят, чтобы разбудить еще спящих товарищей. Они очень быстрые. Разбудить рыцаря занимает всего одну минуту. Сегодня все рыцари еще спят, когда петух Гарри начинает кукарекать. Просыпается только самый молодой рыцарь. Сейчас семь часов. Сколько рыцарей просыпается в 7:01? Объясните!



Сколько рыцарей просыпается в 7:02? Объясните!

Сколько рыцарей просыпается в 7:03? Объясните!

В 7:10 все рыцари не спят. Сколько их? Объясните!

1 Сегодня 23 ученика 2 Б класса вместе со своей учительницей госпожой Умкой отправляются на каток. Стоимость входа 3 евро для человека. Госпожа Умка уже собрала 64 евро и озадачена. Почему она озадачена?



Сколько нужно заплатить за весь класс вместе с учительницей? _____

Объясните ответ. Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

2 Это воскресенье. У колодца встречаются Серебряная Мэри, Золотая Мэри и мать Хильда.



Через сколько дней все трое снова встретятся у колодца? _____

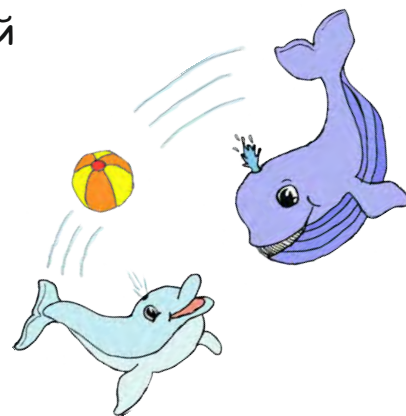
Объясните ответ.

Вычислите, нарисуйте или запишите что-нибудь.

1 В этом году в соревнованиях по финболу соревновались десять команд. Каждая команда встречается с другой командой дважды. Есть очки золотые и железные.

Вот как учитываются очки, когда команда проигрывает:

- Если команда по-прежнему имеет золотые очки и проигрывает, она должна сдать одно золотое очко.
- Если у команды нет золотых очков и проигрывает, она получает одно железное очко.



Вот как подсчитываются очки, когда команда побеждает:

- Если команда все еще имеет железные очки и выигрывает, она может избавиться от одного железного очка.
- Если у команды нет железных очков и выигрывает, она получает одно золотое очко.

В случае ничьей счет не меняется ни для одной из команд.

В первых двух матчах года команда Долфи соперничает с командой Вала. Команда Долфи выигрывает оба матча. Каков текущий счет? Объясните!

Команда Окто подошла к концу игрового времени. В скольких матчах она участвовала? Объясните!

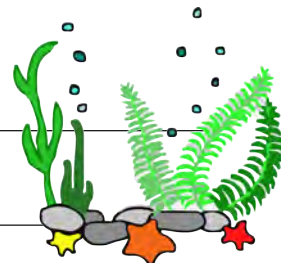
К концу игрового времени команда Окто сумела получить три золотых очка. Сколько раз команда Окто выигрывала? Сколько раз они могли проиграть? Сколько их матчей могли бы окончиться ничьей? Объясните!

2 На День рождения бабушка дарит Барни аквариум с великолепными рыбками. Есть 6 красных рыб, 3 синих и 9 зеленых рыб. Рыбы особенные, потому что могут изменять свой цвет.

Когда красная рыба касается зеленой, обе становятся синими.

Когда красная рыба касается синей рыбы, обе становятся зелеными.

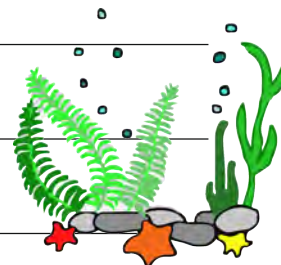
Какое правило вы заметили? Объясните свое правило!



Когда красная рыба касается красной рыбы, обе остаются красными.

Когда зеленая рыба касается зеленой рыбы, обе остаются зелеными.

Какое правило вы заметили? Объясните свое правило!



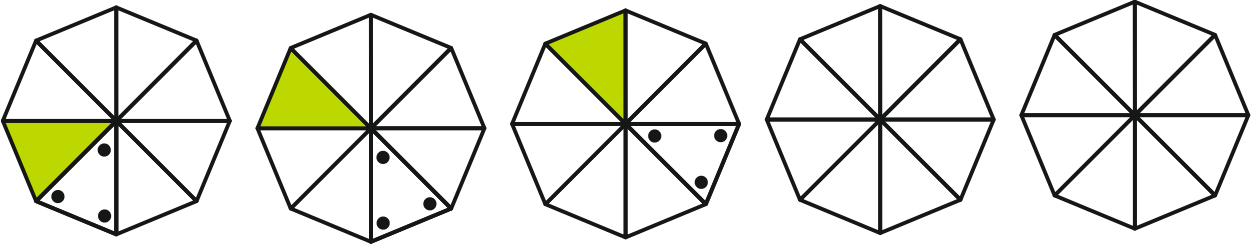
Возможно ли, что когда-нибудь у Барни будут рыбы только одного цвета? Объясните свой ответ!

6 Образные модели

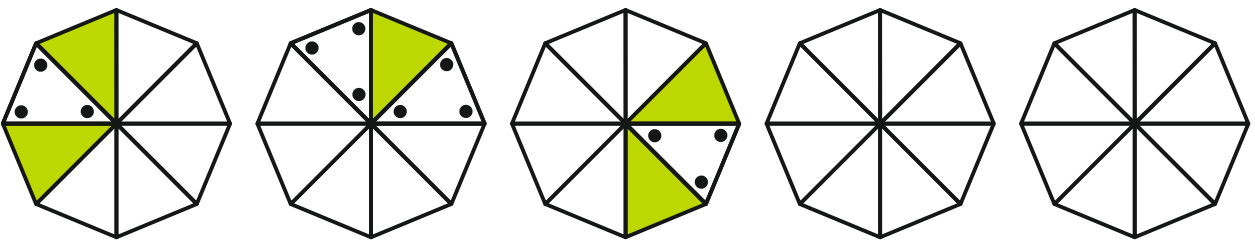
Логическое дедуктивное мышление на основе образных закономерностей

6.1 Распознавание и продление закономерностей	89
Выявление и применение закономерностей	
6.2 Много квадратов и прямоугольников	94
Знакомство и создание моделей	
6.3 Вычисление площадей	96
Определение и сравнение площадей представленных фигур	
6.4 Увеличение масштаба	100
Увеличение фигур на бумаге квадратной формы	
6.5 Пространственное воображение	101
Обработка пространственных композиций с помощью планарных иллюстраций	
6.6 С помощью ножниц и бумаги	105
Вырезание фигурок из сложенного листа бумаги	

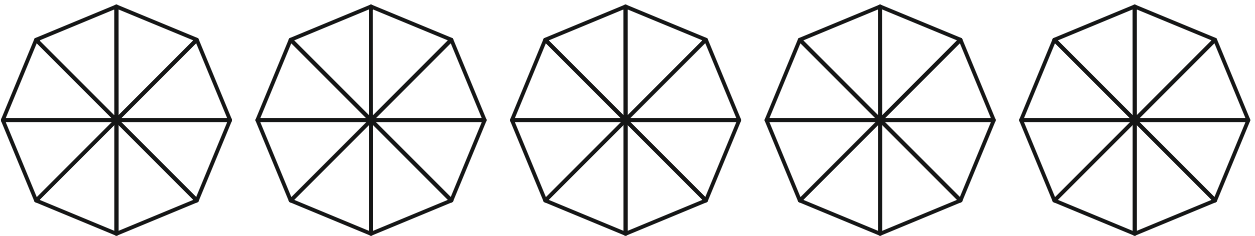
1 Мартин любит придумывать модели. Продолжите его модель!



Также продолжите следующую модель Мартина!



Придумайте сложную собственную модель!



Почему ваша модель сложна?

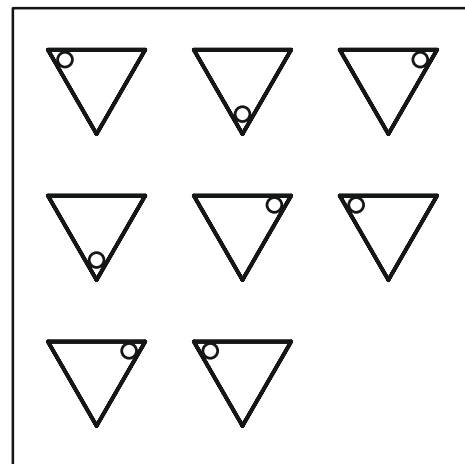
2 Тиль начал создавать необычный рисунок.

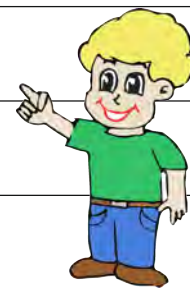
К сожалению, ему мешали и он не закончил.

Он планировал нарисовать что-то внизу справа.

Пожалуйста, закончите его рисунок.

Объясните свой выбор!





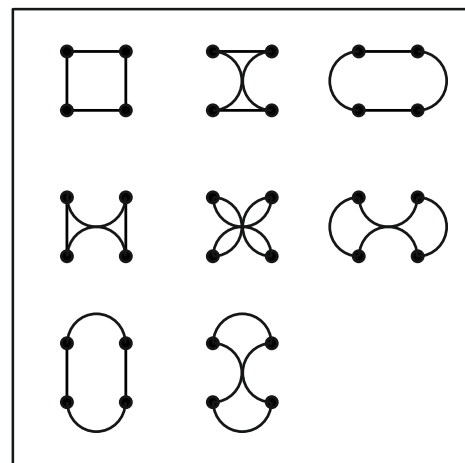
Также Анна начала создавать свой необычный рисунок.

К сожалению, ей тоже помешали и она не смогла закончить.

Она планировала нарисовать что-то внизу справа.

Пожалуйста, закончите ее рисование.

Объясните свой выбор!





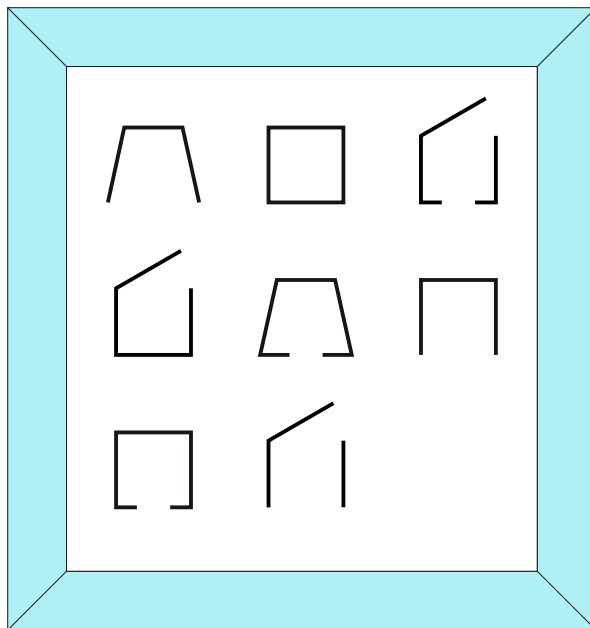
3 Эльфам не требуются ключи для дверных замков.

Дверь открывается, когда загадка разгадана.

Попробуйте открыть эту дверь!

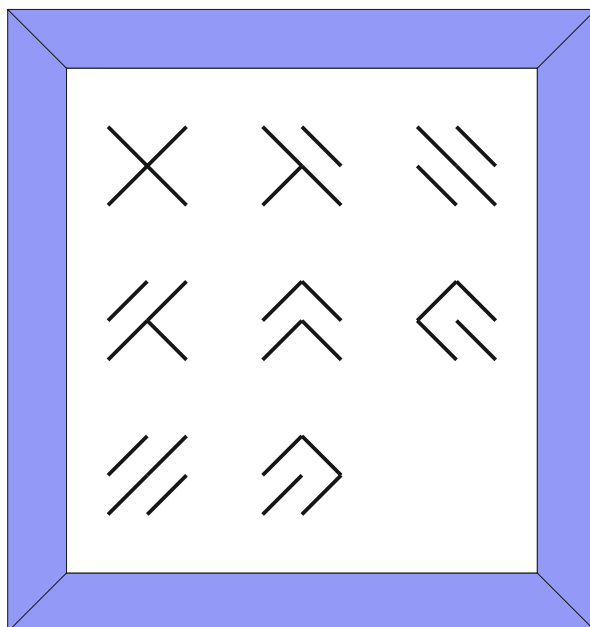
Совет: в нижнем правом углу чего-то не хватает. Нарисуйте то, чего, по вашему мнению, не хватает! Объясните, почему дверь должна была открыться сейчас!



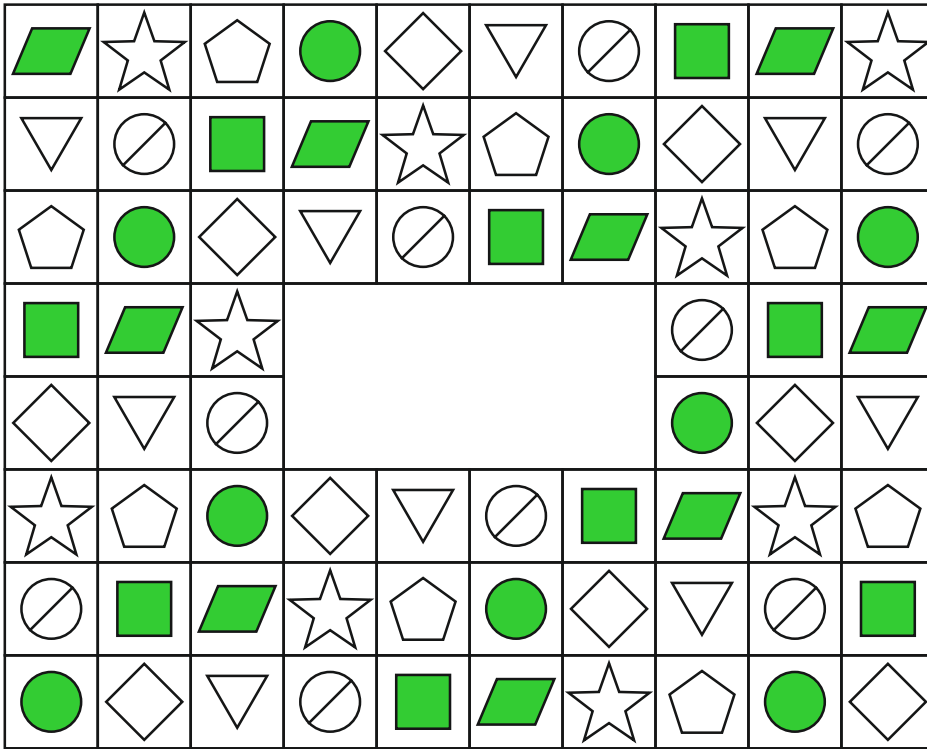


Попробуйте открыть эту дверь!

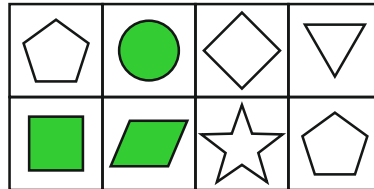
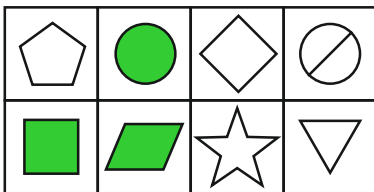
Совет: в нижнем правом углу чего-то не хватает. Нарисуйте то, чего, по вашему мнению, не хватает! Объясните, почему дверь должна была открыться сейчас!



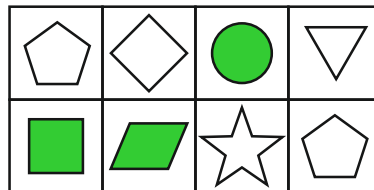
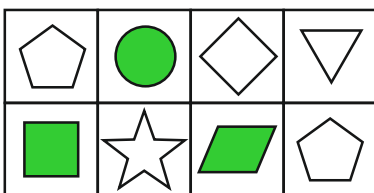
4 Присмотритесь: посередине есть пустое место.



Обведите прямоугольник, который, по вашему мнению, лучше всего подходит внутрь.



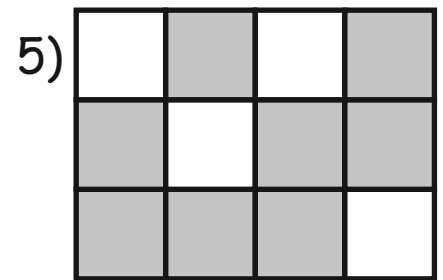
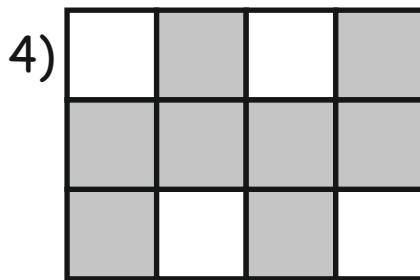
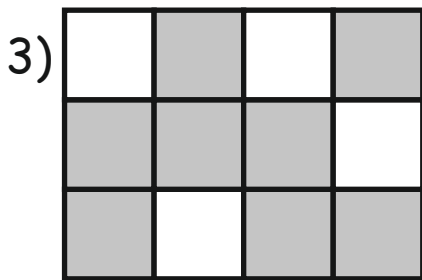
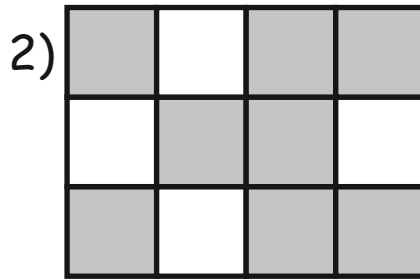
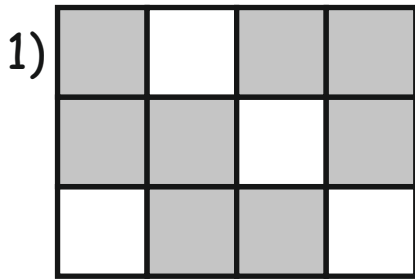
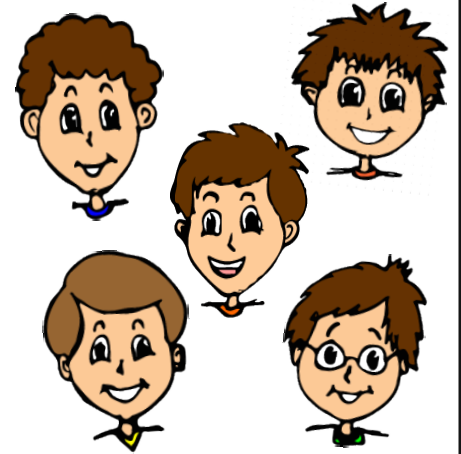
?



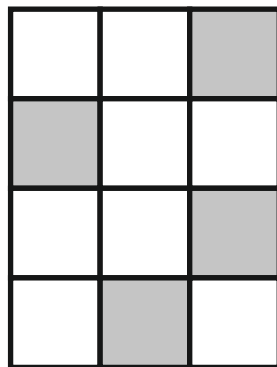
Почему выбранный вами прямоугольник подходит?

5 5 братьев играют с табличками.

Таблички белые с одной стороны и серые с другой. Выкладывают 5 комбинаций.



Какая из их комбинаций лучше всего подходит к этой картине?



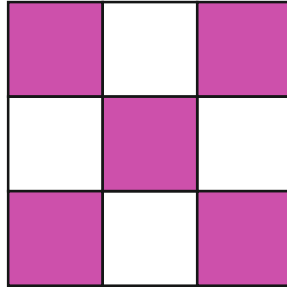
Объясните ответ.

1



Я вижу девять квадратов!


Я вижу гораздо больше квадратов!



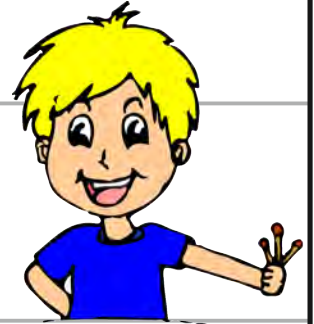
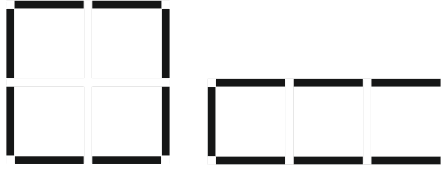
Сколько квадратов с одной стороны видите вы?

Ответ: _____

Объяснение! Напишите или нарисуйте!

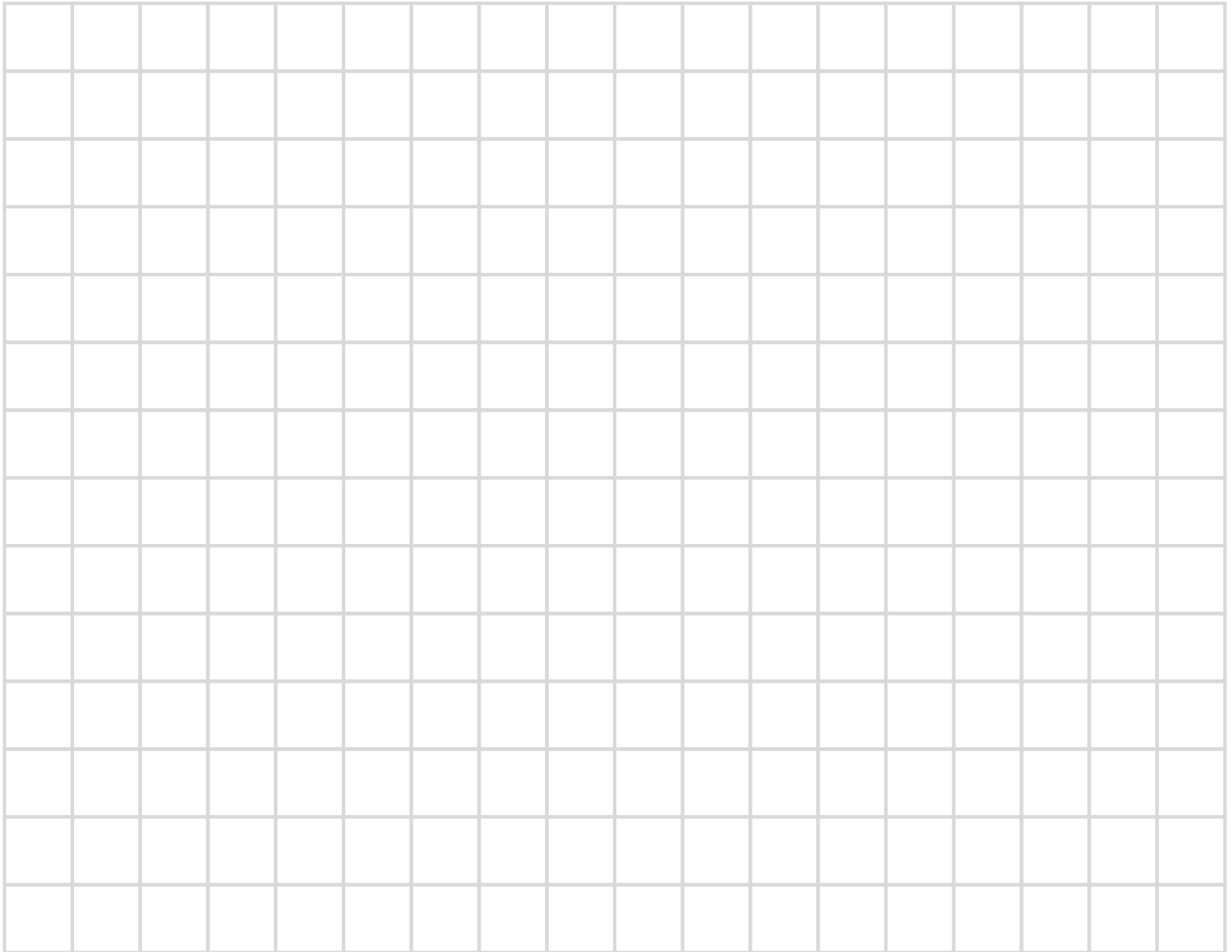
2 У Тима есть несколько косточек. Он хочет использовать их, чтобы заложить четыре стороны прямоугольных фигур. Он начинает с 4 косточек. Так он может сложить всего 1 фигурку. 

Он берет 8 косточек. Теперь он может составить 2 разные прямоугольные фигуры.



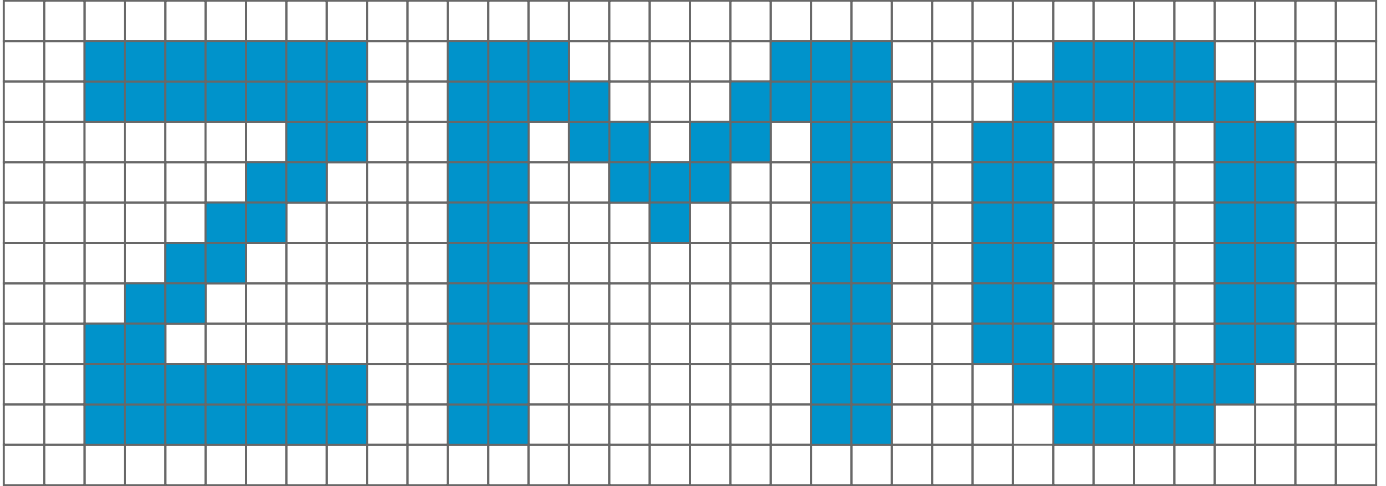
Затем он берет 18 косточек.

Сколько прямоугольных фигур он может сейчас составить? Нарисуй их все.



Что вы заметили? _____

① Тина изображает три буквы на бумаге в клетку:



Для какой буквы Тина использовала больше ячеек? _____

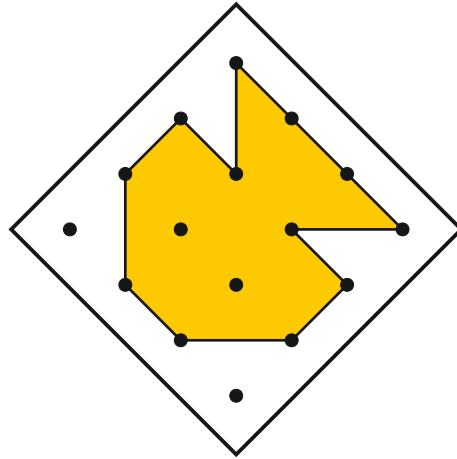
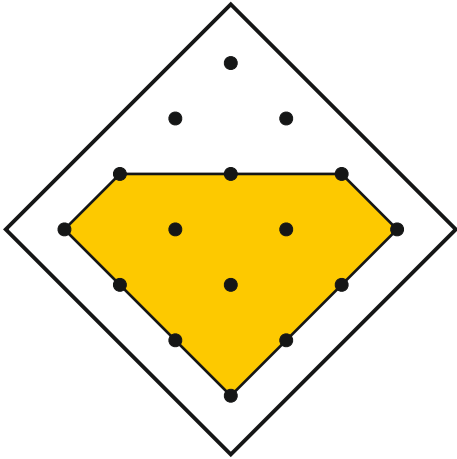
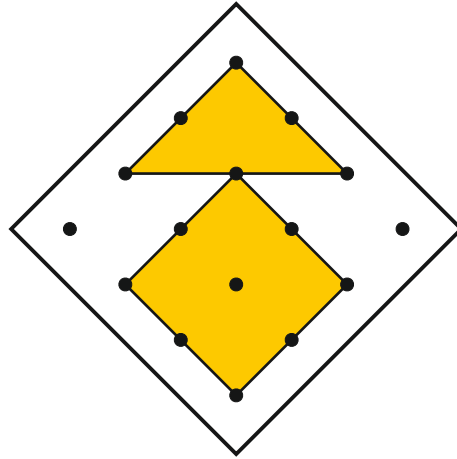
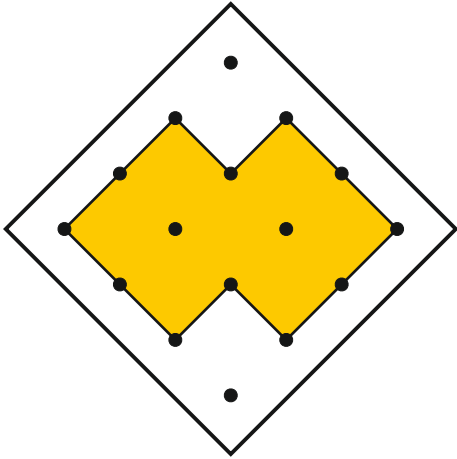
Для какой буквы Тина использовала наименьше ячеек? _____

Так я нашел свой результат:



2

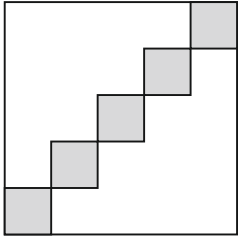
Рассмотрите площади желтых фигур!



Что вы замечаете?

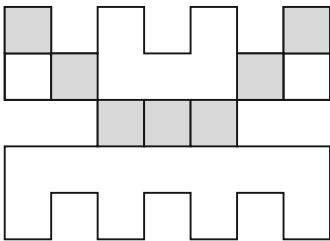
3

Тара имеет 150 маленьких серых квадратов. Она использует их, чтобы выложить две зоны. Поразмышляйте, сколько квадратов ей нужно на каждую из зон! Объясните ответы!



Для этой Таре нужно _____ маленьких квадрата.

Объяснение: _____



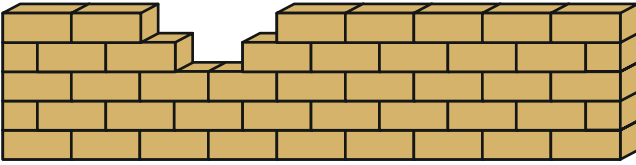
Для этой Таре нужно _____ маленьких квадрата.

Объяснение: _____

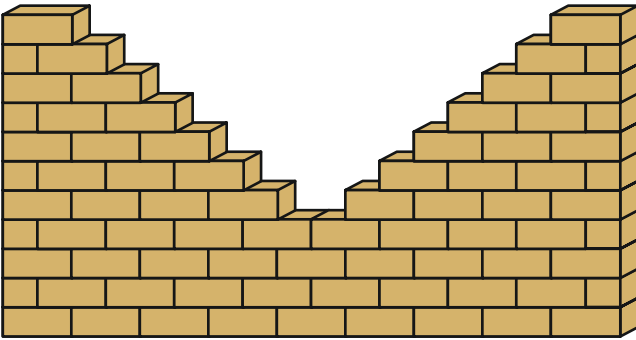
Что вы заметили?

4 Вор-гном.

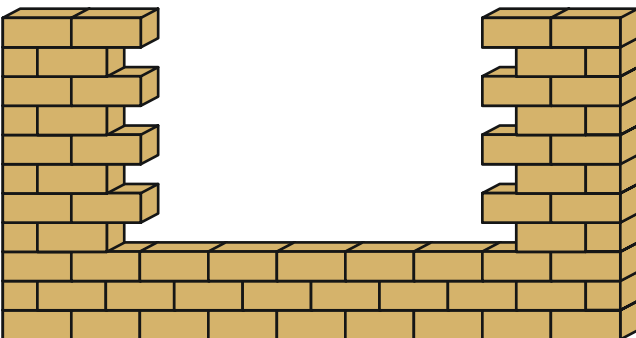
С этой стены гном украл три кирпичика.
Но ему все равно нужно больше кирпичей.



Сколько кирпичиков украл гном из этой стены?
Объясните свой ответ!



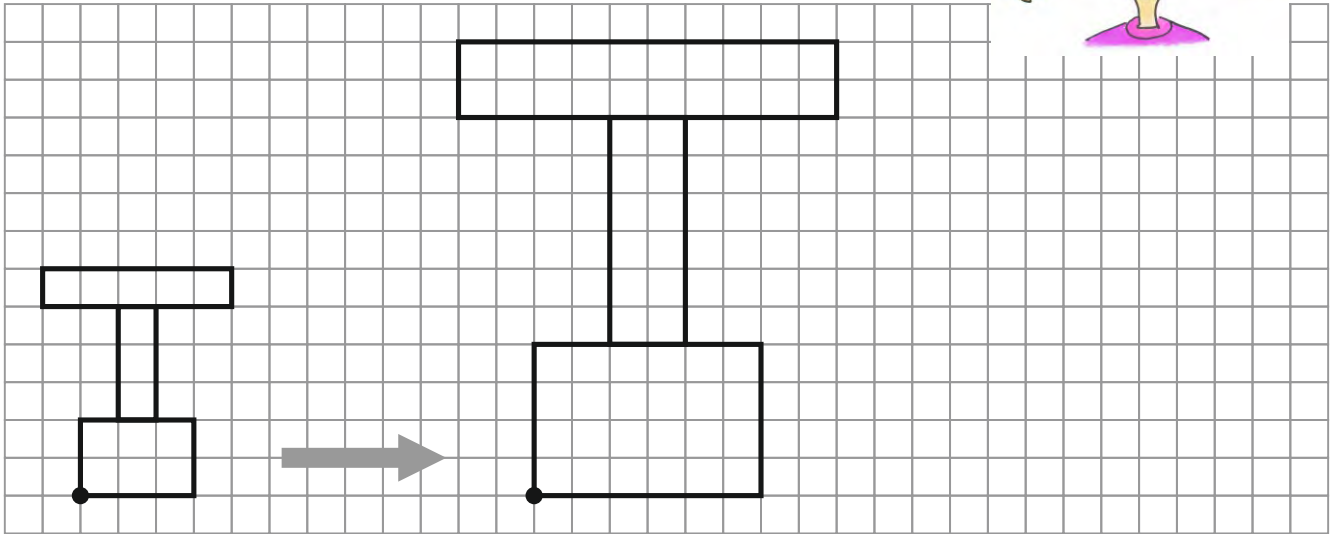
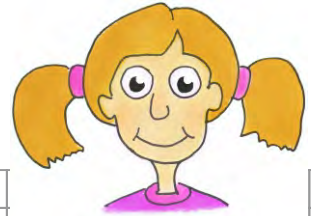
Сколько кирпичиков украл гном из этой стены?
Объясните свой ответ!



①

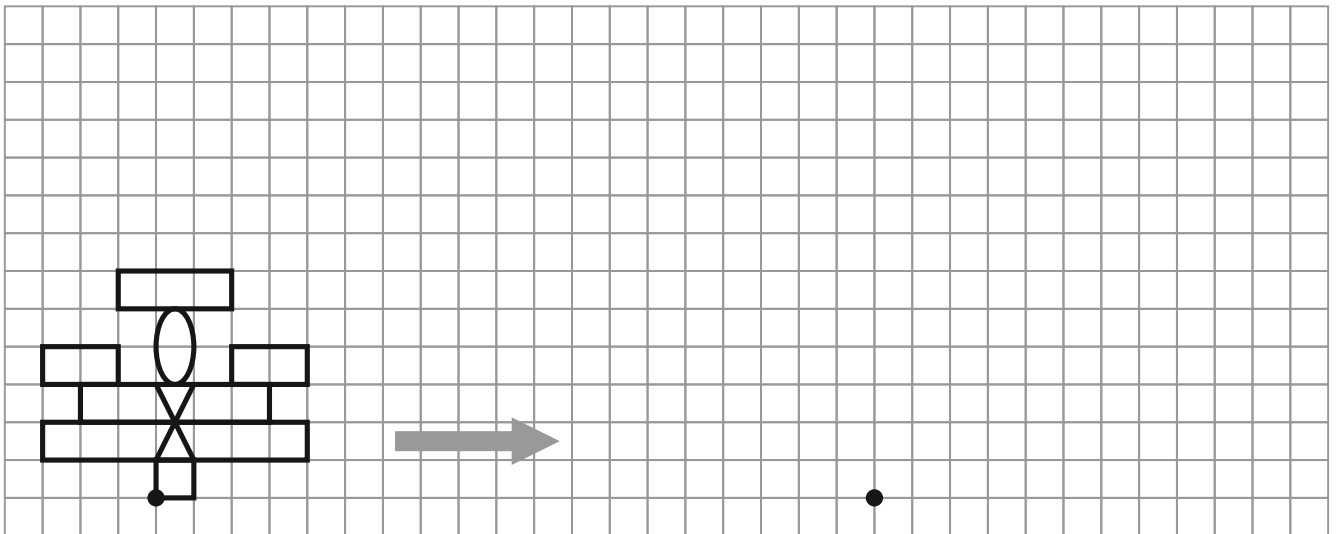
Зина любит рисовать.

Сегодня она практикует масштабирование.



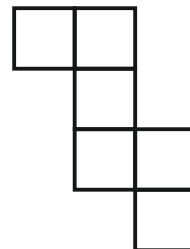
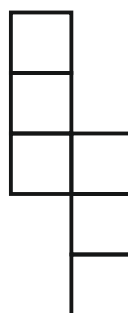
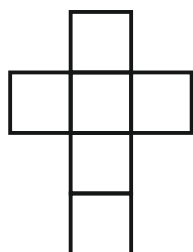
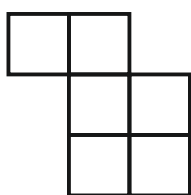
Зина нарисовала новую фигуру.

Увеличьте эту фигуру, как это сделала Зина!



Как вам удалось увеличить масштаб?

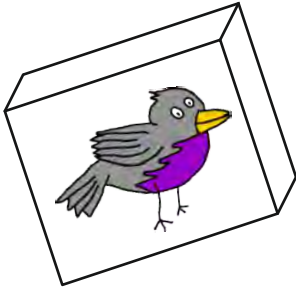
- ① На своей вечеринке эльфы хотят поиграть с кубиками. Они имеют шаблоны, которые могут использовать для создания кубиков. Посмотрите внимательно! Какие из их шаблонов хорошо подходят для создания кубиков?



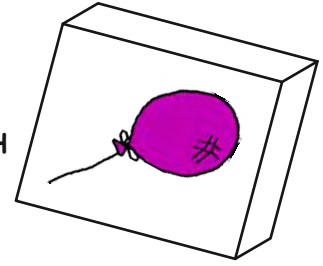
Объясните!



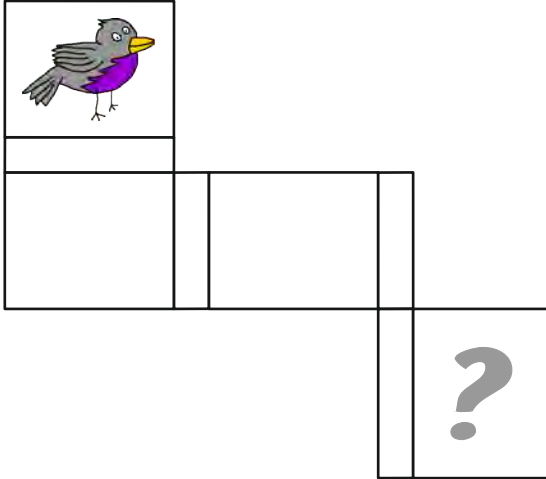
2



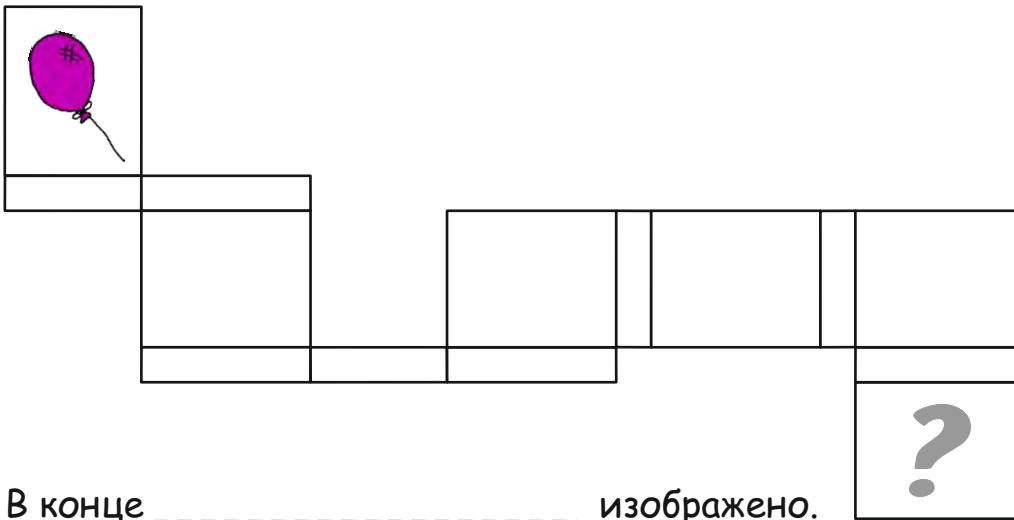
Карлос играет с коробкой.
На передней стороне изображена
птичка. На задней стороне изображен
воздушный шар. Карлос осторожно
разобрал коробку на частицы.



Найди, кто будет изображен в конце!



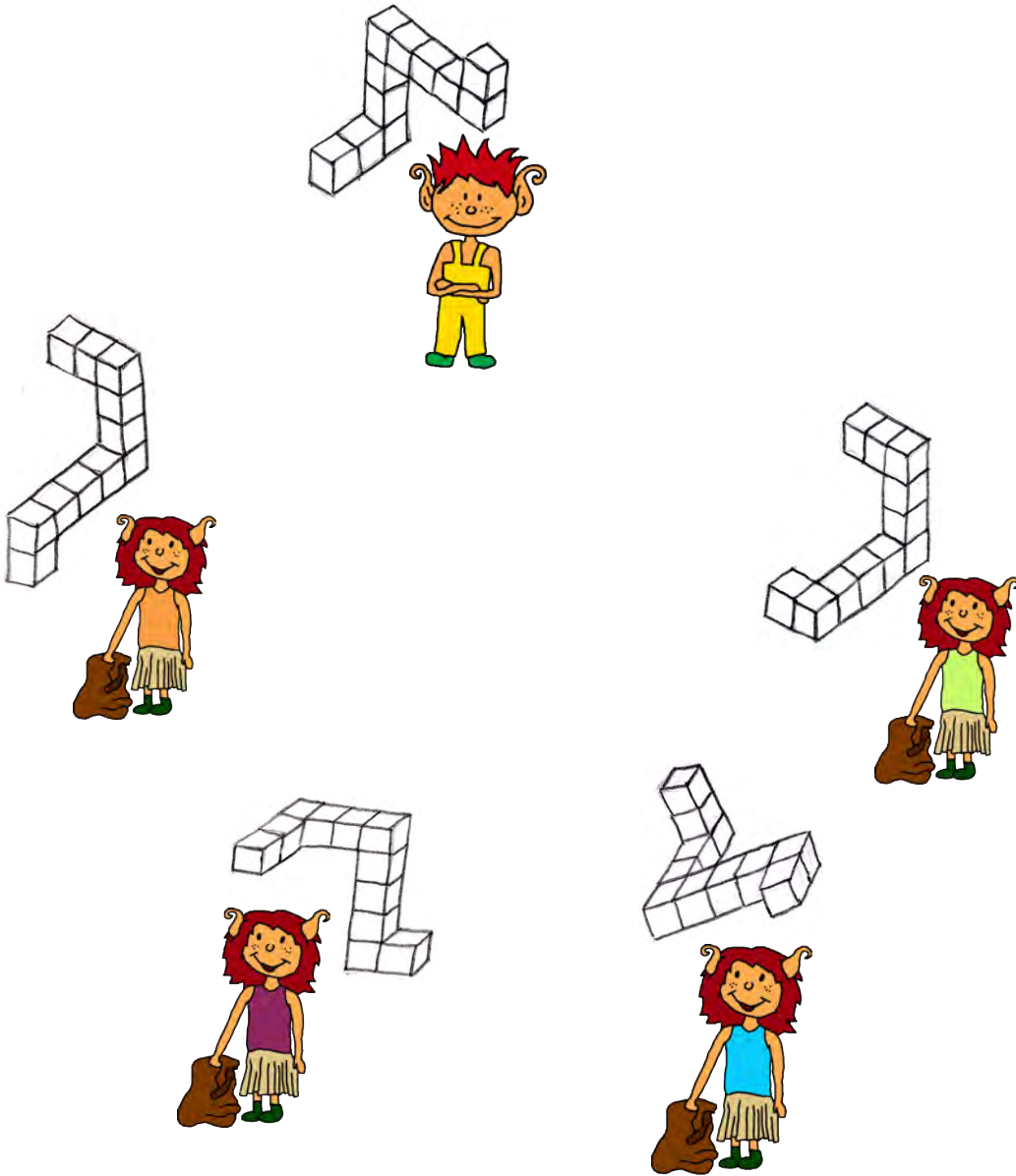
В конце _____ изображено.



В конце _____ изображено.

Что вы заметили?

- 3 **Фаро сложил фигуру, как у его сестры.**
Кто его сестра? Соедините по линии Фаро и его сестру.



Объясните свой выбор!

4 Столяр Уилл создал большую деревянную коробку.

Он окрашивает ее со всех сторон синим цветом.

Сколько синих сторон у коробки?

Через неделю он снова занимается своей синей деревянной коробкой.

Он распиливает ее и получает 27 маленьких деревянных кубиков

одинакового размера. Как ему это удалось?


Уилл рассматривает свой маленький деревянный кубик.

Сколько синих со всех сторон? _____

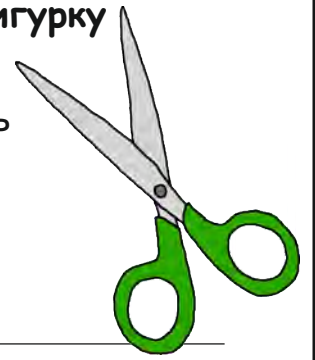
Сколько из них синих с одной стороны? _____

Сколько из них синих с нескольких сторон? _____

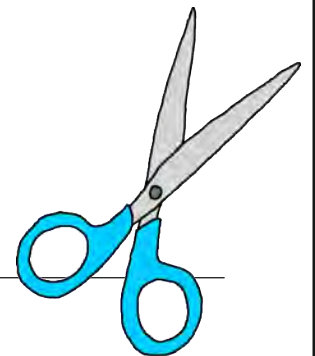
Объясните свой ответ! Вычислите, нарисуйте или напишите что-нибудь.



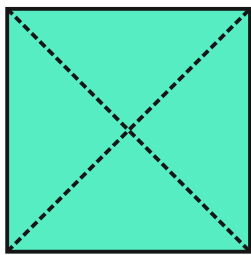
- 1** Возьмите сложенный лист бумаги. Теперь вырежьте фигурку таким образом, чтобы при разворачивании бумаги вы видели круг. Подумайте хорошо. Вы не можете разрезать после разворачивания. Подсказка! Что важно для вырезания, чтобы в результате получился круг?



- 2** Возьмите сложенную бумагу. Теперь вырежьте фигурку таким образом, чтобы при разворачивании бумаги вы видели пятиконечную звезду. Подумайте хорошо. Вы не можете изменять форму после разворачивания. Объясните, что вы учитывали, чтобы создать пятиконечную звезду.

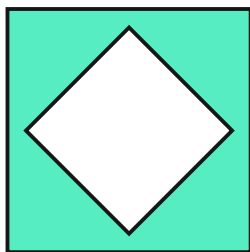


3



Возьмите бумагу и вырежьте из нее квадрат. Затем сложите этот квадрат дважды по линиям изгиба, которые вы видите слева, чтобы получился треугольник.

Теперь вырежьте так, чтобы вы получили после развертывания фигуру. Которая расположена справа:



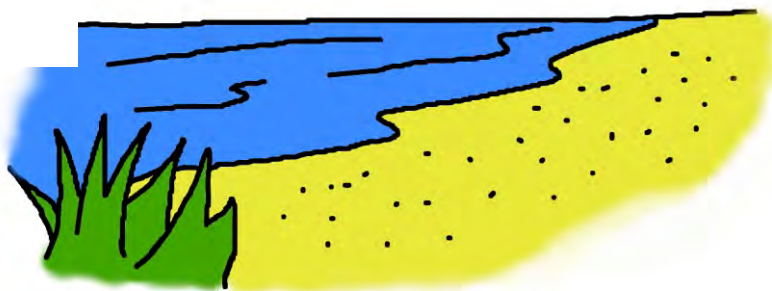
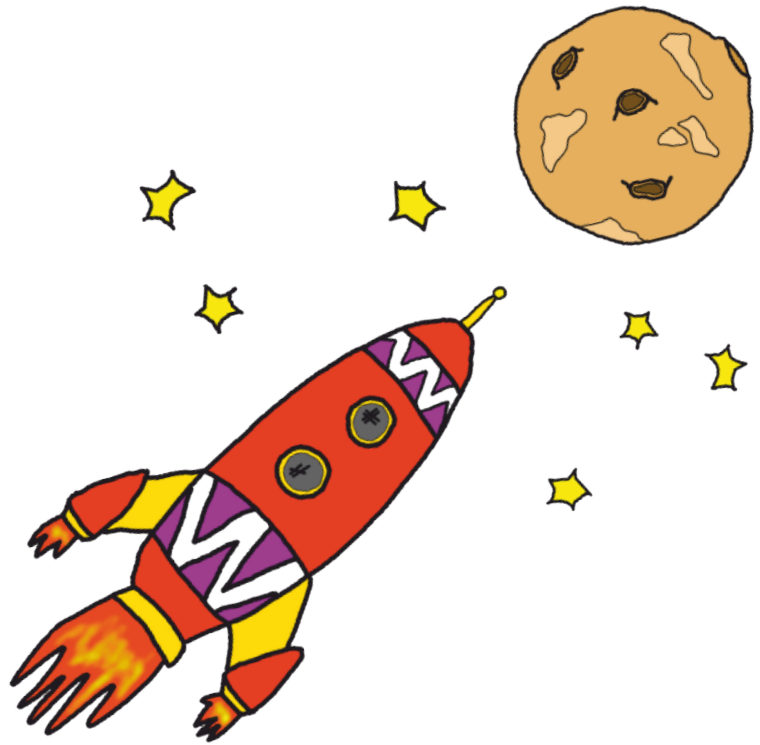
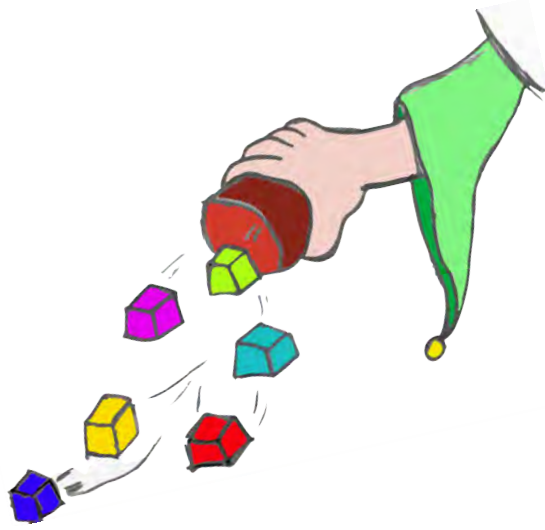
Подумайте хорошо! Не тратьте бумагу.

Что важно при разрезании?
Какие советы вы дадите другим?

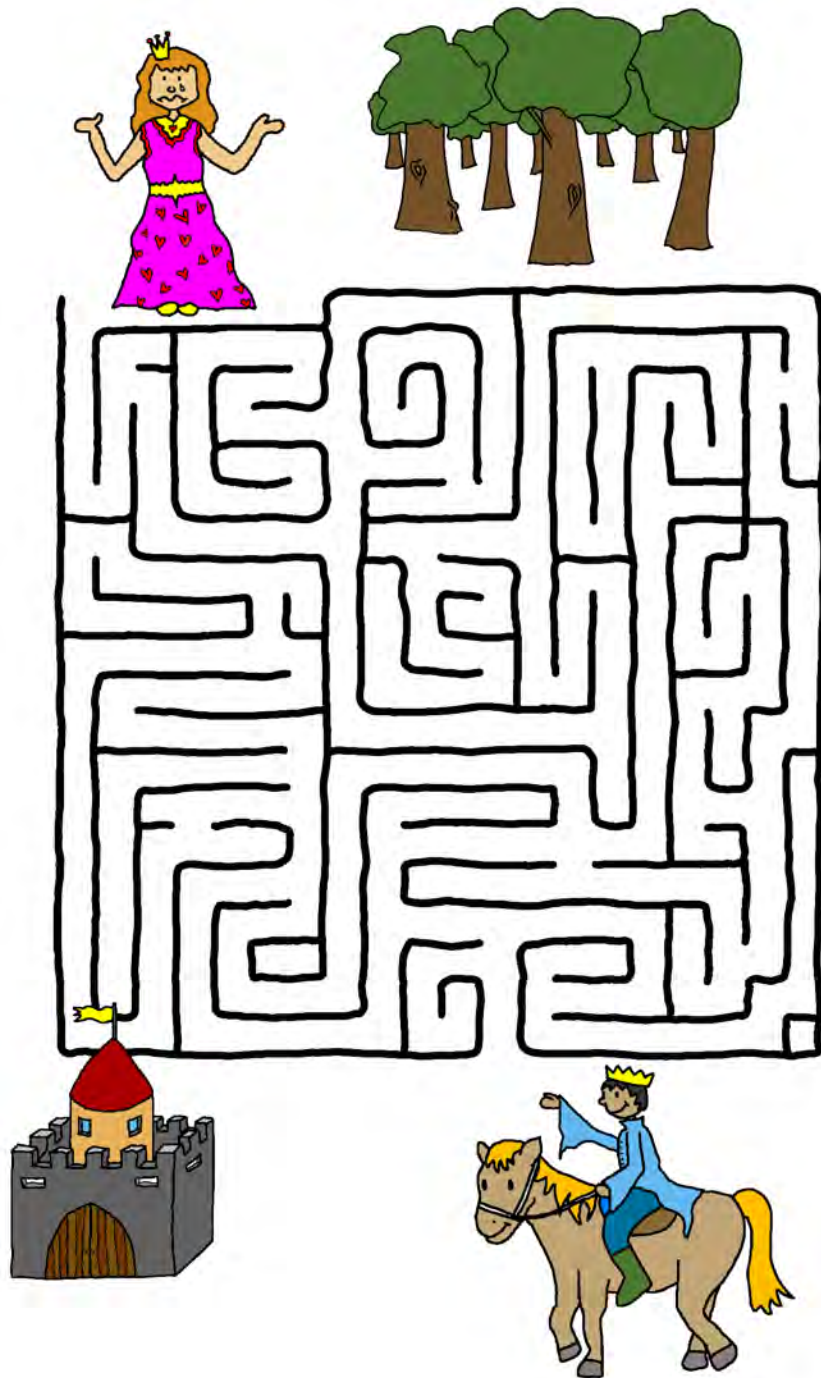


Больше места для мыслей!

7 Все хорошо,
что хорошо
заканчивается
Лабиринты и
многое другое



- 1 Помоги принцу добраться до принцессы.
Нарисуйте удачный путь через лабиринт.



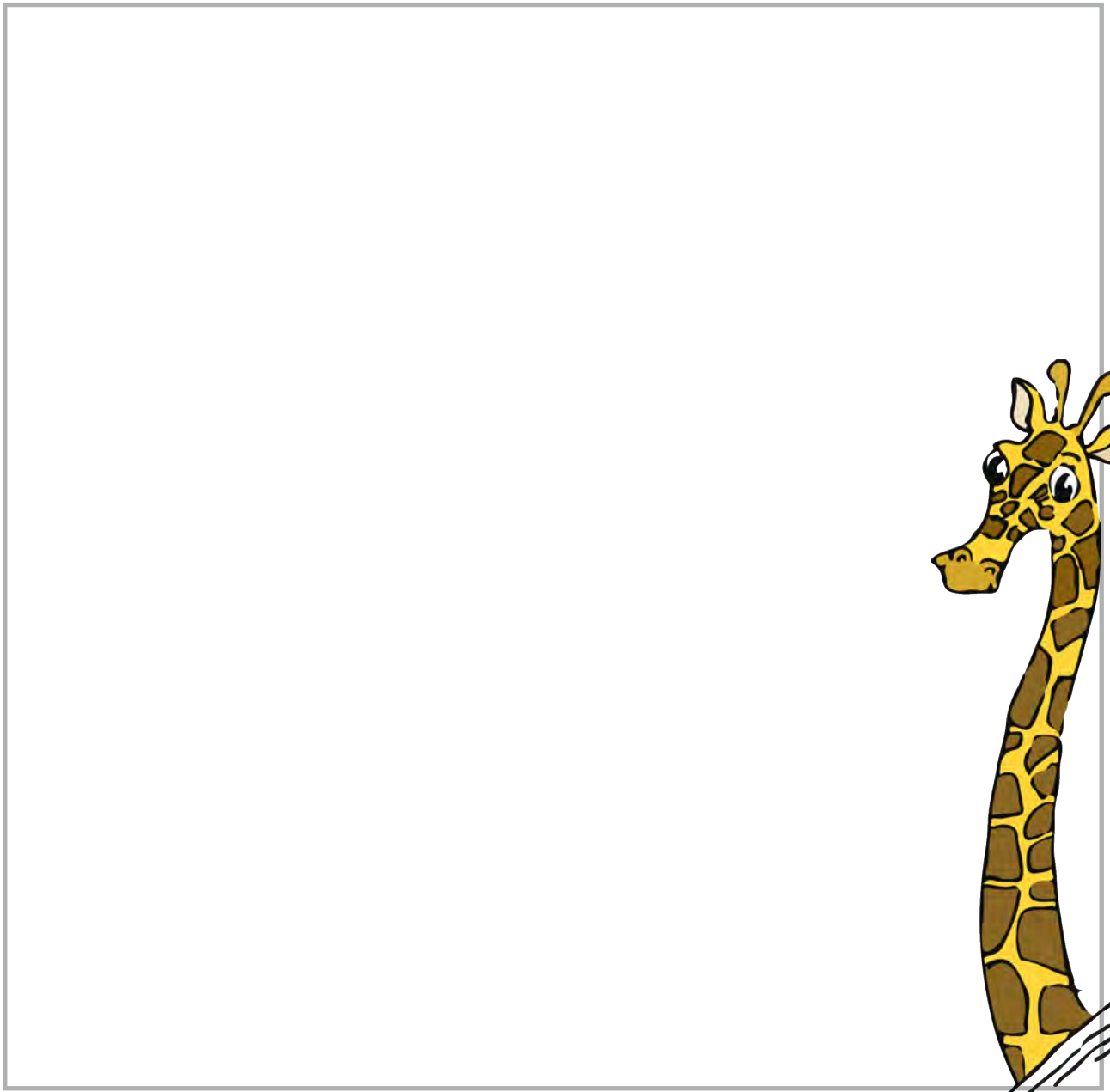
Почему ваша дорога удобна для принца и принцессы?

2 Найдите путь к сокровищу!



Как можно пройти через лабиринт быстрее и дольше?

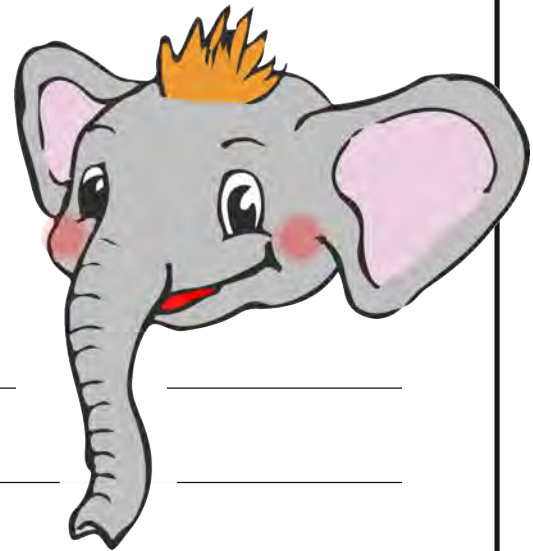
- 3 Внимательно подумайте, какие сложные вычислительные задачи вы можете решить. Запишите их и решите!

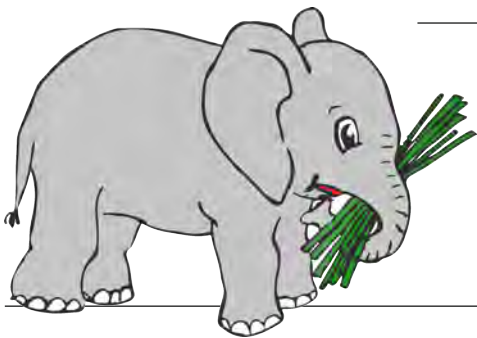


Почему ваша задача сложная?

4 Посчитай как можно дольше!

837, 854, 840, 857,





Больше места для выражения мнений!

В. ПЕРСПЕКТИВЫ БУДУЩЕГО

*Математика — это не зрелищный вид спорта.
Это не перечень знаний, это не символы на странице.
Это то, с чем вы играете, то, что вы делаете.
~ Кит Девлин~*

Анализируя подходы и решения, предоставленные лучшими детьми нашей выборки, снова и снова становится очевидным, что ключевым элементом для понимания математики является логическое дедуктивное умозаключение, достигнутое путем изучения математических взаимосвязей.

Помимо нашей работы с математически одаренными детьми мы также уделяем большое внимание нашим многолетним исследованиям развития математического мышления, включая исследования основных принципов логического мышления. В этом контексте мы адаптировали один из форматов задач Спирмена (Spearman, 1904; см. также Raven, 1965) и уточнили его в терминах двух разных типов логического заключения. Фундаментальная идея состоит в том, что в зависимости от основных методов мышления, которые использует человек, ориентация в мире, типы источников для получения собственной точки зрения и формирование мировоззрения не одинаковы. Давайте рассмотрим одну из наших матриц (рисунок В1). В нижнем правом углу отсутствует фигура. Какая может подойти? Почему?

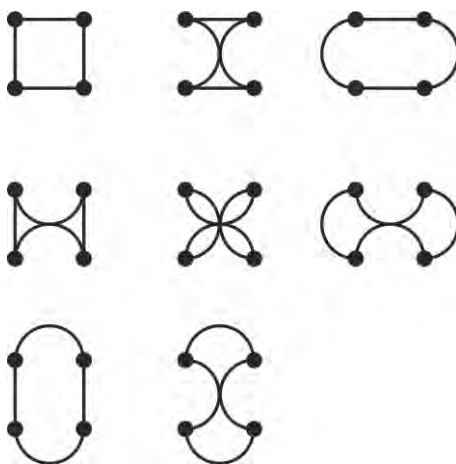


Рисунок В1: Пример задачи инструмента качественной диагностики предикативно-логического и функционально-логического мышления (QuaDiPF, (Schwank, 1999/2000)).

Когнитивные процедуры позволяют устанавливать отношения между фигурами: конкретные компоненты фигуры выходят на первый план, а остальные компоненты остаются мнимыми. Механизм, определяющий, на каких компонентах сосредоточено внимание, а какие стороны остаются изолированными, является основой двух типов мышления, которые мы определили.

Предикативно-логическое мышление: тип логического вывода, устанавливающий отношения, сосредотачиваясь на подобных или идентичных компонентах объектов. Что касается данной задачи, то в первом ряду верхняя и нижняя линии «принадлежат вместе», но боковые линии не подходят по шаблону (рисунок В2). Порядок и структура способа. Продолжая эту когнитивную оценку, выходит фигура с линиями из нижнего ряда (верхний и нижний) и правой колонки (по бокам) соответственно.

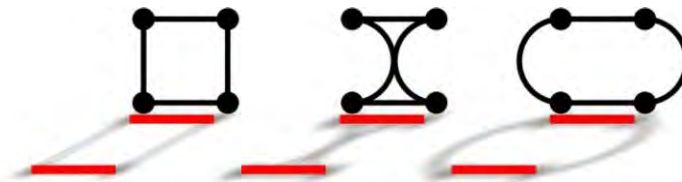


Рисунок В2: Ментальная конструкция с предикативно-логическим фокусом. Верхняя и нижняя линии указываются как идентичные.

Функционально-логическое мышление: тип логического вывода, устанавливающий отношения путем мышления в последовательности действий и эффектов, достигаемых посредством того, что различия в объектах могут быть превращены один в другой (рисунок В3). Что касается данной задачи, то в первом ряду боковые полосы можно представить внутрь, а потом наружу. Это мысленно создает динамическое представление об изменяющихся фигурах. Продолжая эту когнитивную оценку, выходит фигура с вытянутыми наружу верхней, нижней и боковыми линиями. Чтобы получить результаты, необходимые соображения, связанные с деталями (рисунок В4).



Рисунок В3: Ментальная конструкция с функциональной направленностью. Боковые линии, которые сначала сгибаются внутрь, затем наружу.

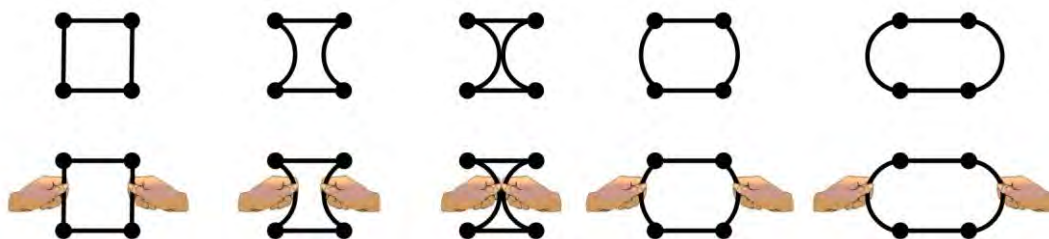


Рисунок В4: С помощью соображений, ориентированных на действие, можно создать заданные целевые фигуры. В переносном смысле руки необходимы для начала и контроля процесса. Только пассивного наблюдения недостаточно.

Согласно результатам других психологических исследований наш анализ показал, что мальчики, как правило, сильнее в функционально-логическом мышлении, чем девочки (см. Schwank, 2001, 2003).

Относительно раннего математического образования, сформированного на базе значительной арифметической подготовки, эту разницу следует учитывать. Вычисление означает обработку чисел. Значения изменяются при вычислении различными способами в зависимости от метода вычисления. Цель – достичь результат. Этому способствует понимание самих значений как результатов вычислительных процессов.

Поэтому искусство обучения пониманию чисел состоит в том, чтобы предоставить детям адекватный арифметический опыт, демонстрирующий связь между числами на основе действий. Это потребовало бы больше уделять внимание на уроках математики ощущению функциональных связей и рефлексии с ними. Для этого необходимы действия, управляемые игровыми правилами. Необходимо освободить дидактический материал из тени его существования, как вспомогательное средство и сосредоточиться на значении игрового мира, способствующего расцвету математического мышления, практически демонстрируя математические проблемы и возможные подходы к их решению. Фиксация на письменном языке математики несет риск опасного упрощения процессов мышления, складывающихся только с точки зрения объекта, основанного на запоминающемся знании, вместо подлинного восприятия и применения функций чисел и арифметических действий с точки зрения процесса (см. также Hefendehl-Hebeker , 2001; Schwank & Nowinska, 2008).

В течение нескольких лет нашей основной целью было приложение значительных усилий для разработки математических игровых миров, которые позволили бы

реализовать именно такой урок математики, который так нужен. К этому времени мы создали игровой мир ENSO (ориентация на числовое пространство, связанное с событиями) для исследования диапазона чисел от нуля до девяти, спиральная лестница вычисления для доступа к числовому пространству от 0 до 19, система счисления Стелланиана для достижения понимания функционирования системы значения места и числового соответствия для облегчения мультипликативного понимания (например, квадратных чисел, биномиальной формулировки), таким образом, закладывая прочную, ориентированную на действие основу для раннего математического образования, генерирующую понимание математики на основе процесса. Начиная с дошкольного возраста, Динамические лабиринты предлагают игровое поступление к формированию классических концепций, необходимых для математического понимания автоматизации и программирования (дополнительную информацию см http://ikm.uni-osnabrueck.de/aktivitaeten/dl/dynamic_labyrinths/dynamic-labyrinths.html)

Весь вышеупомянутый материал удачно применялся на многочисленных уроках с детьми от детского сада до среднего школьного возраста, также на тренингах для профессионалов образования. Единодушное одобрение как взрослых, так и детей, дает основания надеяться, что в ближайшем будущем эти методы обучения приведут к глубокому, ориентированному на процессы математического понимания многих детей, позволит насладиться активным и компетентным исследованием математического мира.

Литература

- Hefendehl-Hebeker, L. (2001): Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser, B. Wollring, B. (Hg.): Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt. 83-98. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
- Raven, J. C. (1965): Advanced progressive matrices. Sets I and II. London: Lewis.
- Spearman (1904): 'General intelligence' objectively determined and measured, American Journal of Psychology. 15, 201–293.
- Schwank, I. (2017): Erlebniswelt Zahlen – Erstunterricht mit der Rechenwendeltreppe. 4. erweiterte und überarbeitete Auflage. Arbeitsheft für Schülerinnen und Schüler. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2013a): Kleine Einsen und ein Wunderwerk. Die Zwergen-Mathe-Olympiade. Grundschule, 11, 16-19.
- Schwank, I. (2013b): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster & J.-H. Lorenz (Hg.): Rechenstörungen bei Kindern. – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 93-138. 2. überarbeitete und erweiterte Auflage. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Schwank, I. (2010a): Erlebniswelt Zahlen – Spielereien mit der Rechenwendeltreppe für Vorschulkinder. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2010b): Zahlentheater – Spiele mit Holzfiguren zur Vorbereitung der Schulschrift (mit Anwendung am Zahlenstrahl). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. (2003). Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In: Schwank, I.: Zur Kognitiven Mathematik. [Introduction to Predicative and Funktional Thinking. In: Schwank, I.: On Cognitive Mathematics.] Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 35(3), 70-78.
- Schwank, I. (2001): Analysis of Eye-Movements during Functional versus Predicative Problem Solving. In J. Novotna (Ed.): European Research in Mathematics Education II. 489-498. Prague: Charles University.
- Schwank, I. (1999/2000): QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken. [QuaDiPF – Qualitative Diagnostic Instrument for Predicative versus Functional Thinking.] Sets A/B/C/D. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Schwank, I. & Nowinska, E. (2008). Die Denkform des Formel Denkens. [The Thinking Form of Formula Thinking.] In B. Barzel, T. Berlin & A. Fischer (Hg.): Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker. [Algebraic Thinking. Commemorative Publication for Lisa Hefendehl-Hebeker.] 111-122. Hildesheim: Franzbecker.

Вебссылки

- Schwank, I.: Mathematische Spielwelten. Letzter Aufruf: 30. August 2017:
<http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/mathe-magie/index.php/mathematische-spielwelten>
- Schwank, I.: Dynamische Labyrinth. Letzter Aufruf: 28. August 2017:
<http://www.mathedidaktik.uni-koeln.de/11642.html>

Д В заключение

Сертификаты (шаблоны копий)

Сертификат

Бронза-сертификат

Серебро - сертификат

Золото - сертификат

Сертификат для учителя

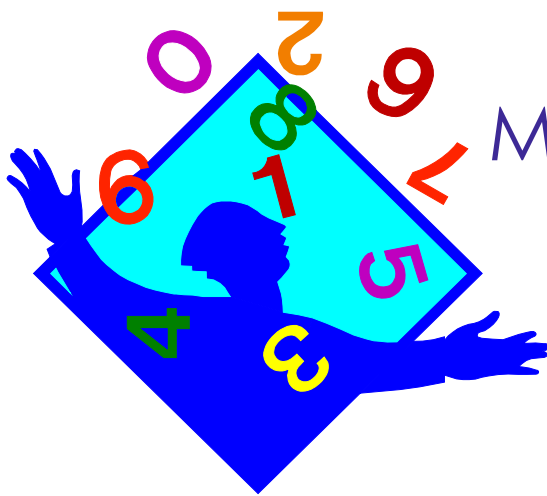
МОГ - Члены команды

Без их поддержки МОГ не было бы реализовано в течение 13 лет.

Заявления МОГ-детей на участие в туре МОГ- Мозговой поезд



Большой ежегодный заключительный праздник МОГ в Университете Оснабрюк



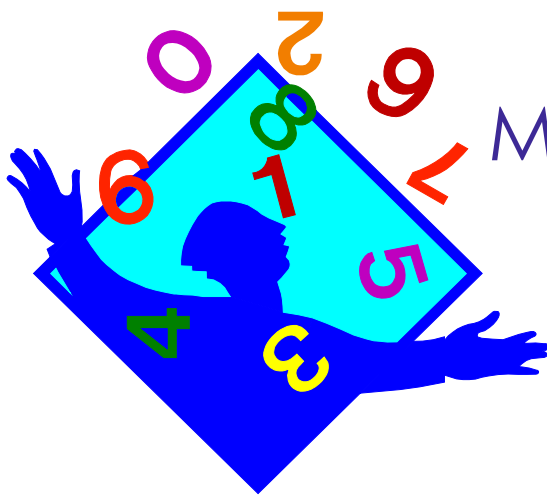
Математическая
олимпиада
ГНОМОВ

Имя и фамилия

Школа

Класс





Математическая
олимпиада
ГНОМОВ

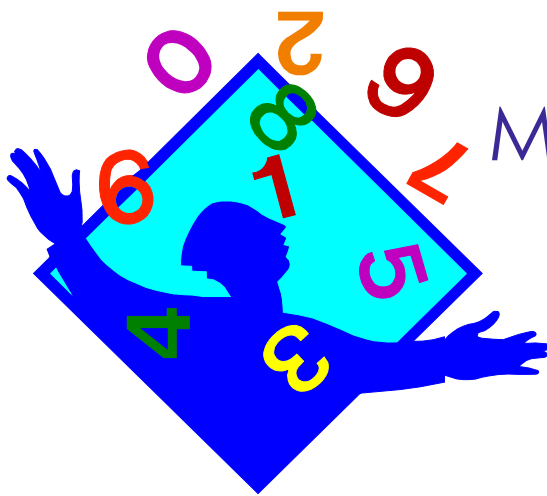
Бронза

Имя и фамилия

Школа

Класс





Математическая
Олимпиада
ГНОМОВ

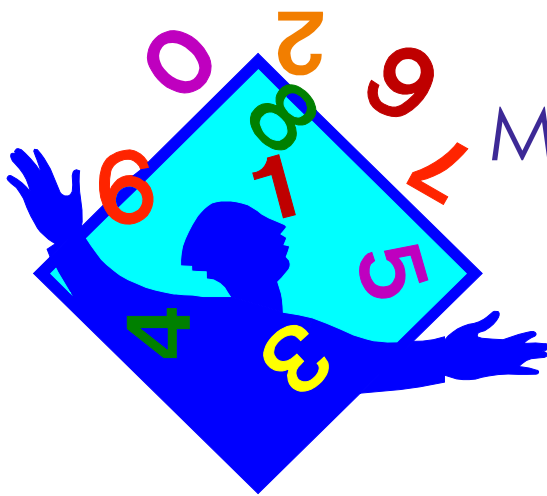
Серебро

Имя и фамилия

Школа

Класс





Математическая
олимпиада
ГНОМОВ

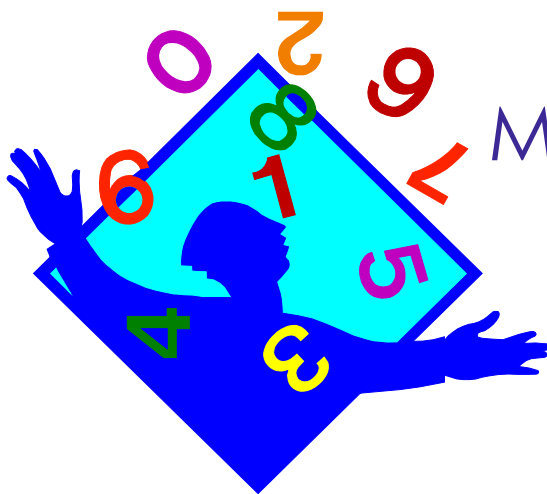
Золото

Имя и фамилия

Школа

Класс





Математическая Олимпиада ГНОМОВ

Школа

Класс - группа усовершенствования

интенсивно и успешно управляется



МОГ - Члены команды

Постоянный научный руководитель: проф, д-р Инге Шванк

Благодаря большой преданности участников удавалось провести МОГ в течение 13 лет. Некоторые из них являются подлинными фанатами МОГ и приняли участие во многих раундах. Большинство членов - учащиеся начальной школы, изучающие математику, другие - сотрудники университета или уверенные волонтеры.

Все они заслуживают большой благодарности!



Олимпиада по математике

для учащихся 3-х классов города и района Оснабрюк

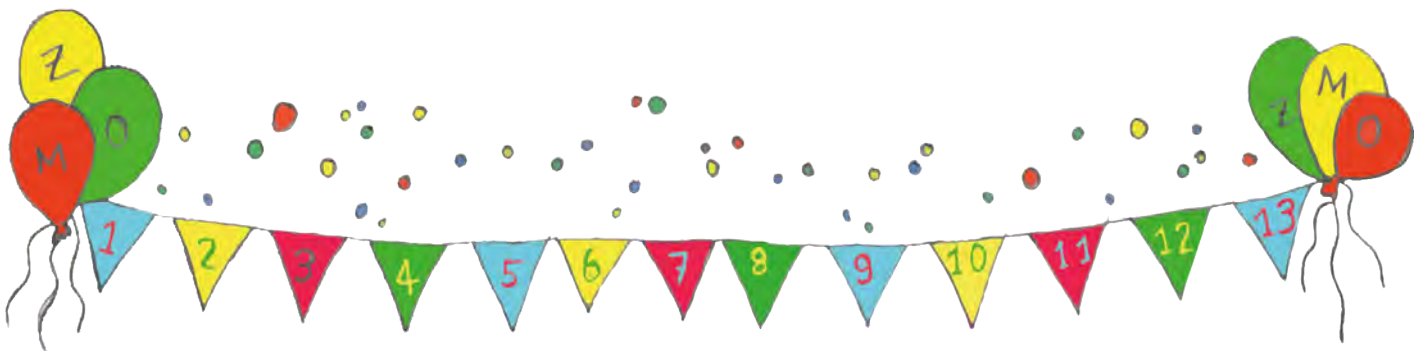
Anke Aring	Wiebke Fritz	Wiebke Klaue
Alexander Auch	Kathrin Fühner	Anja Knochenwefel
Kerstin Bartke	Marion Gawlik	Anne Köhler
Anke Becker	Christopher Gerke	Judith Koonen
Verena Beckmann	Regina Gerlach	Natascha Korte
Carsten Beernink	Katharina Gleis	Kathrin Kraicziczek
Chantal Bennek	Eva Maria Gretzmann	Björn Kremp
Kathrin Blocksdorf	Corinna Hänisch	Margit Krützhake
Katja Boeck	Dorit Heckeroth	Jenny Kursawe
Miriam Bollmer	Franziska Heckeroth	Thomas Kybart
Imke Bolz	Dana Heinze	Maria Lager
Sina Böttger	Vanessa Hermes	Judith Lagies
Jana Bröcker	Marianne Herzberg	Eva Lasar
Bianka Bruchwald	Wibke Hille	Nils Linnemann
Lisa Brückel	Manuela Hilmes	Johanna Lohmann
Frauke Bruns	Burgis Hoffmann - zu Höne	Nicole Lüdiger
Prof. Dr. Elmar Cohors-Fresenborg	Pia Hörstermann	Gaby Lüken
Anna Deppen	Martina Hülsmeier	Monika Lütke Dreimann
Carina Deters	Thea Israel	Tomke Lüttel
Julia Detert	Solveig Jensen	Julia Lux
Johannes Dieker	Sabine Jones	Sabrina Macke
Nicole Dijks	Emilia Jüngling	Corinna Maier
Susanne Dreier	Angie Kalverkamp	Fabienne Martini
Verena Dübbert	Marei Kaminski	Annalena Masur
Annika Düvel	Katharina Karrasch	Ramona Vanessa Meier
Christine Ecksele	Jörg Erik Kinner	Bastian Mertens
Sabrina Frieling	Dennis Klaffei	

Tanja Meyer
Bin Müller
Nina Müller
Edyta Nowinska
Katrín Pech
Marlen Petermann
Stefanie Petersen
Lutz Picht
Stefanie Plagemann
Gabriele Plietz
Melanie Ploppa
Inka-Maria Pohl
Maren Pötter
Torsten Pretschner
Frank Pundsack
Franziska Quade
Bianca Raddatz
Philipp Rahe
Karen Räsch
Ina Ricker
Cornelia Riepe
Jörg Ritterbusch
Tina Rohde
Florian Röhrs
Anuschka Ruge
Irina Ruks
Petra Sandeck
Diana Schall

Christina Schaper
Diane Schemme
Moana Schilberg
Thomas Schinkowski
Annedore Schmidt
Johanna Schmidt
Kathrin Schnalle
Stefan Schneider
Mareike Schnoor
Britta Schomakers
Janina Schröder
Elisabeth Schwank
Julia Sibbing
Ina Spreen
Anna-Luise Strauch
Kristin Straukamp
Katharina Tarp
Anne Theisling
Irene Thiemann
Imke Tjaden
Nadine Träger
Sophia Varnholt
Anna-Bianca
Viebrock
Julia Vischer
Alla Vlasenko
Dirk Vorhold
Carena Wellmeyer

Anja Wemhoff
Corinna Wendeln
Sonja Weßel
Christine Wiechers
Maren Wies
Julia Winckler
Josephine Windisch
Kirsten Winkel
Inga Winkelmann
Christina Woitschek
Wera Wortelen
Philipp Zumdohme
Janina Zwirner





Высказывания МОГ

«Мозговой поезд» - Раунд, потому что...

wir herausgefordert werden möchten.

мы хотим, чтобы нам бросали вызов.

Weil's Spaß macht! ☺

Потому что это весело!

ich Mathe sehr sehr gerne mag und ich werde alles geben. Ich war
sehr aufgeregt als ich ausgewählt wurde. Irgendwie war mir das
sehr wichtig. Das Gefühl kann ich nicht beschreiben. Ich bin
sehr glücklich.

Мне очень нравится математика, и я буду делать все возможное. Я был очень взволнован, когда меня выбрали. Почему это было важно для меня. Я не могу описать это чувство. Я очень счастлив.

ich zeigen möchte was ich alles kann.

Я хочу представить свои способности.

wir ~~haben~~ schon so viel in Mathe gelernt
haben und wir dann bestimmt gute Chancen
haben zu gewinnen.

Мы так много научились по математике, поэтому наши шансы на победу, безусловно, были высоки.

Weil wir Mathe gut finden. Weil wir gerne etwas
neues lernen wollen.

Мы любим математику. Мы хотим узнать что-нибудь новое.

Damit wir unseren Kopf mal
richtig einschalten können.

Мы можем правильно включить голову.

wir für die ganze Klasse mitmachen
Мы участвуем целым классом.

Weil ich gerne Mathearbeiten mag. Ich möchte gerne testen wie gut ich wirklich bin.
Потому что я люблю тесты по математике. Я хочу проверить, насколько я хорош.

wir Schwierige Aufgaben mögen, gerne knabbeln und Spaß an Mathe haben.
Мы любим сложные задачи, увлекаться и развлекаться с математикой.

esekun besonders ist. Это что-то удивительное. Очень приятно, что мы можем сделать это.

es ist sehr schön das wir es dürfen.

Weil ich Mathe liebe. Und wenn man dann auch noch Preise gewinnen kann ist das

Super.
Я люблю математику. И то, что тоже можно выиграть призы, это здорово.

... wir gerne unser Klasse gut vertreten möchten.


... es sicherlich viel Spaß machen wird, mit

anderen Kindern zu rechnen.
...мы хотим хорошо представлять наш класс.... безусловно, будет очень весело решать вместе с другими детьми это будет увлекательное событие.

... es ein spannendes Erlebnis sein wird.

wir Mathe mögen und in der Hirnspornrunde kann man mal so richtig den Kopf anwerfen.
Нам нравится математика, и в «Мозговом поезде» можно правильно переключиться на голову.





Для многих математика кажется трудным и недоступным предметом. Поэтому трудно представить, что дети могут увлекаться математикой всех вещей. Однако это возможно.

Сборник олимпиадных задач вдохновляет.

В конце концов важный способ видения математики.

Проще и недальновидно: решать учат.

Более увлекательно и эффективно: создание путей для расцвета и развития математического мышления и потенциала воображения.

