

珍惜孩子的数学天赋

— 奥林匹克数学习题汇编 —

英格·施万克


$$\begin{array}{l} \blacksquare - \blacklozenge = 2 \\ \blacksquare - \blacklozenge = 20 \end{array}$$



ZMO2007

数学教学理论研究中心系列丛书56号

奥斯纳布吕克 2019

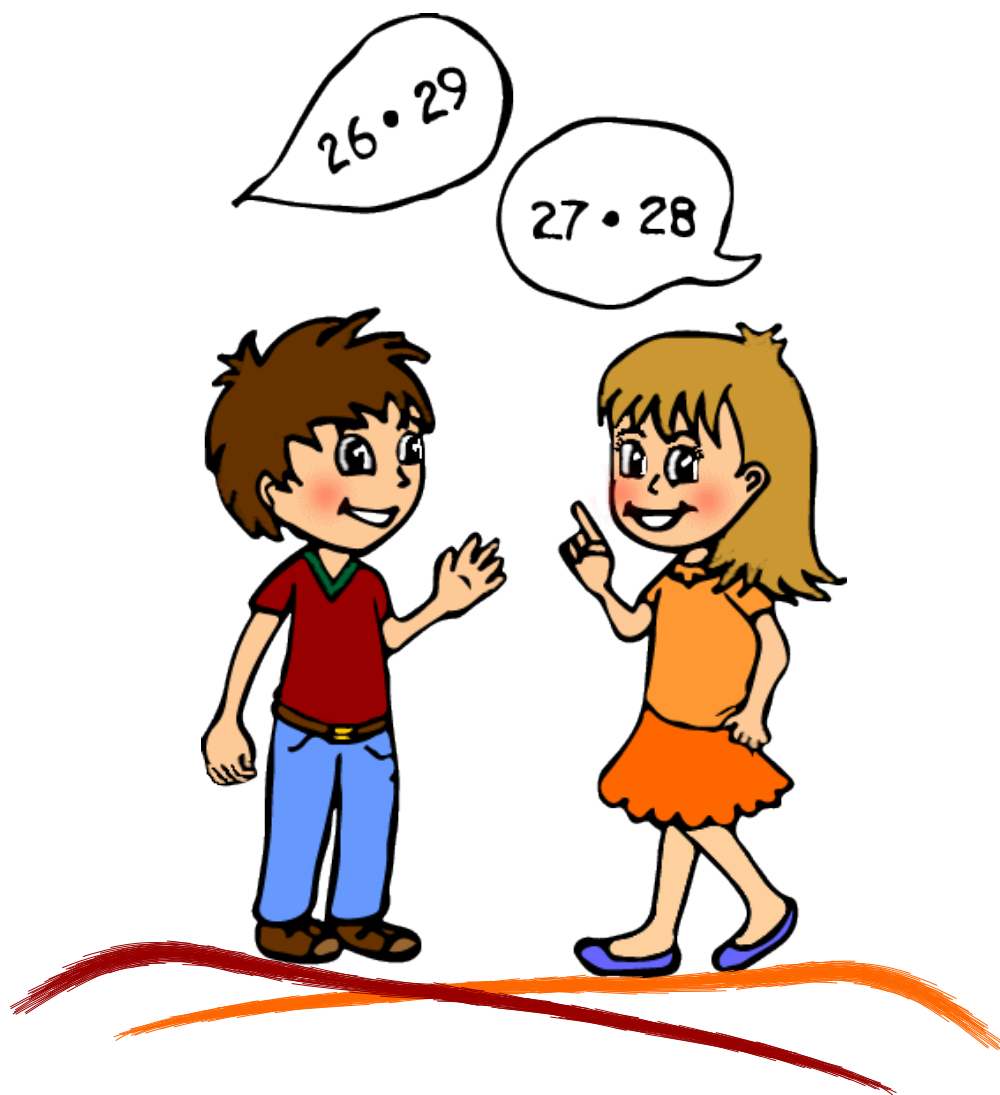
ISBN 978-3-925386-76-3

珍惜孩子的数学天赋

— 奥林匹克数学习题汇编 —

【德】英格·施万克 著

谭港俐 译





“数学早期教育”项目
学术指导：英格·施万克 博士教授

英格·施万克
珍惜孩子的数学天赋
— 奥林匹克数学习题汇编 —

2019年第二版，奥斯纳布吕克：数学教学理论研究中心协会
数学教学理论研究中心系列丛书56号
ISBN 978-3-925386-76-3

源于“数学早期教育”项目

本书于2001年至2013年由ZMO团队成员合作完成，
ZMO团队成员名单详见附录。

封面设计：布吉斯霍夫曼·祖霍恩
插画：布吉斯霍夫曼·祖霍恩 克里斯蒂娜·沙佩尔 伊丽莎白·施万克
翻译：谭港俪

特别鸣谢赞助商格奥尔格斯马林许特钢厂基金会的鼎力支持



Stiftung
Stahlwerk Georgsmarienhütte

© 数学教学理论研究中心协会
邮政信箱 18 47
D-49008 奥斯纳布吕克

总目录

来自ZMO孩子们的认可	I
• 对数学的看法	
• 对老师们的评价	
一、引言	VI
二、奥林匹克数学习题汇编	XII
小精灵数学奥林匹克竞赛——扉页	XVIII
目录	XX
1. 细心计算	1
2. 数字和运算谜题	11
3. 算术规律	29
4. 掌握可能性	41
5. 应用题	57
6. 图像模型	87
7. 圆满收官	109
三、展望	XXIV
四、附录	XXXII
证书（复印模板）	
ZMO团队成员	
来自ZMO孩子们的认可	XLI
• 参赛理由	



ZMO

小精灵数学奥林匹克竞赛

激发兴趣

参加ZMO的孩子们对数学的热爱

参加ZMO的孩子们对老师的喜爱



ZMO: 小精灵数学奥林匹克竞赛，是在德国奥斯纳布吕克市以及周边地区为小学三年级学生举办的比赛，也是十三年来对“数学早期教育”项目的贯彻落实。该项研究由奥斯纳布吕克大学认知数学研究所与数学教学理论研究中心协会共同负责。

来自ZMO孩子们的认可

我们喜欢关于数学的.....



Das Mathe Spaß macht und es regt die schwarzen Zellen^{an}. Das man denken muss und Knobeln.

数学给我带来了许多乐趣，活跃了我的大脑细胞，让我能够更好地思考，解决困惑。

alles

一切

... das man ein schönes Gefühl hat, wenn man eine schwierige Aufgabe gemacht hat.

..... 当解答出一道困难的题目会感到身心愉悦。

- dass man manchmal auf verschiedene Art und Weise

- 有时候可以用许多不同的方法得到最终的答案。

zu Lösungen kommen kann,

- dass man alleine oder im Team arbeiten kann,

- 能够自己单独或者在一个团队里完成所有的事。

- dass man Mathe jeden Tag brauchen kann.

- 每天都可以应用数学。

Ich finde es total spannend, fast wie ein Detektiv Rätzel und Aufgaben zu Lösen.

我觉得这太刺激了，就像一个侦探在解决谜题，完成任务一样。

Das Kopfrechnen, weil das mich richtig in Schwung bringt, Knobel-Aufgaben dann kann mein Gehirn mal richtig dampfen, und sonst gefällt mir auch alles an der Mathematik.

心算，因为它真的非常激励我，较难的题目能让我的大脑快速运转，而且我也很喜欢其他关于数学的一切。

Mathe ist spannend, abwechslungsreich mit guten Aufgaben. Mathematik braucht man für Leben und für den normalen Alltag. Mathe bietet leichte, mittel und schwierige Aufgaben. Mathe fördert das Gehirn. Und außerdem macht Mathe einfach Spaß.

数学是令人兴奋的，并且提供了许多好题目的变形。我们在生活和日常交易中都需要用到数学知识。数学有基础的、中等的、偏难的题目。数学训练着大脑。还有就是，数学特别有趣。

dass wir immer etwas Neues lernen. Mathematik ist für das eigene Leben, für die Zukunft und einen guten Beruf wichtig. Dividieren, subtrahieren mal nehmen oder addieren - Rechnen macht natürlich Spaß, wenn du Mathe gerne hast.

我们不断地在学习新知识。数学对于人的一生来说是非常重要的，以及未来和得到一个好工作。当然如果你喜欢数学，做加减乘除运算也是很有意思的。

dass es viel Spaß macht. Man kann nicht nur rechnen, sondern auch zeichnen, messen oder etwas wiegen. Ich finde es gut, wenn man verschiedene Rechenwege ausprobieren kann.

这非常有意思。不仅有计算，而且还可以绘画，或是给某样物品测量、称重。我十分喜欢尝试用不同的方法来进行计算。

das wir immer wieder mit noch mehr und noch größeren Zahlen rechnen können.

我们能够一次又一次地用更多更大的数字进行计算。

Die guten Noten, Die schweren Aufgaben (sehr sehr sehr schwer) Beispiel: $373 \cdot 591 = 220443$

很高的分数，很难的题目（非常非常非常难，比如说 $373 \times 591 = 220443$ ）。

das es so viele schöne Aufgaben gibt.

这儿有许多非常棒的题目。

Weil Mathe cool ist

因为数学很酷。



来自ZMO孩子们的认可

对老师们的评价.....



Wir finden an Mathematik gut ... 我们喜欢关于数学的.....

die Lehrerin. Wir lernen mit Zahlen zu rechnen, damit wir im Leben gut klar kommen.

老师们。我们学习用数字计算，这样就能更好地应用于生活之中。

Wir finden an Mathematik gut ... 我们喜欢关于数学的.....

Ich habe eine tolle Lehrerin und mir macht Mathematik sehr viel Spaß. Ich lerne viele neue Sachen.

我有一个特别棒的老师。对于我来说，数学是充满乐趣的，我可以从中学到很多新知识。

Wir möchten an der ZMO-Hirnsportrunde teilnehmen, weil ...
我们也想加入小精灵头脑风暴的队伍中，因为.....

Uns Mathe Spaß macht, weil unsere Klasse recht gut rechnen kann, weil unsere Mathelehrerin uns gut trainiert hat und weil wir es ohne sie gar nicht wüssten.

我们喜欢数学，而且我们整个班级的计算能力都很强，因为数学老师把我们培养得非常好，没有她我们肯定做不到。

Wir finden an Mathematik gut ... 我们喜欢关于数学的.....

Das der Lehrer so nett ist, Das der Unterricht ein bisschen lustig ist, abwechslungsreich

老师特别和蔼，课堂也特别有趣，花样繁多。

Wir finden an Mathematik gut ... 我们喜欢关于数学的.....

dass unsere Lehrerin dafür sorgt, dass der Unterricht nie langweilig wird und gibt uns immer neue Aufgaben zum rechnen.

我们的老师从未让课堂无聊过，而且她总是会给我们出新题目让我们计算。

珍惜孩子的数学天赋

—奥林匹克数学习题汇编—

一、引言

*数学是美丽而浪漫的，
数学世界不会是一个无聊的地方，
而是一个非凡的，值得花费时间的地方。*
——【英】马库斯·杜·索托伊

数学不仅是科学和日常生活的有用工具，更重要的是它的趣味性以及人们对它的社会认知。例如，数学是所有新科技和经济市场的基础。但是，数学也在闲暇时光提供了“欢乐”的任务。长期以来，数学作为一门困难而艰巨的，但却十分重要的科目，不得不和它众人皆知的坏名声作斗争。在过去几年里，人们似乎对它改变了看法。德国数学家协会参考 2010 年出版的代表性研究（见下：网页链接），其中表明，在被调查的德国五年级以上的学生们中，数学是第二受欢迎的科目。此外，在这项研究中被询问的 68% 的成年人也表示，他们在日常生活中也喜欢解决一些数学问题。这些研究结果可以作为人们对数学的看法从负面隐含意义到正面积极见解的转变的一项指标。由于我们在过去几十年的“数学早期教育”项目中积极推进孩子们对数学的兴趣和他们的数学思维发展，所以我们对“小精灵数学奥林匹克竞赛”（ZMO）的提出和发展也感到十分的欣慰。对数学既具有挑战性又趣味无穷的积极看法其实也能从孩子们对 ZMO 的评价中反映出来。（详

见书前书后“孩子们对 ZMO 的赞同”)

与任何其他科目一样，对数学的兴趣、数学能力，以及相关的富有乐趣的积极性只有在为大量不同的、相关专业领域的经验创造可能性时才会慢慢展开，最好从小就开始。除了早期的、基础的引导之外，我们认为从特别有数学天赋的孩子到具有特殊教育需求的孩子的整个范围内提供必要的特别关注和关心，以便为他们的数学知识打下坚实的基础，丰富他们的认知能力。特别是数字空间导向和数字建构意义的两个认知层面的发展已被证明是幼儿数学思维发展的重要组成部分（施万克&施万克，2015）。鉴于此，我们在“数学早期教育”项目中开发了一个数学游戏世界，从而用以理论为基础，趣味无穷并注重过程的方式来引入数学概念（参见施万克，2013a 的 C 部分），我们还会关注与数学基础教育紧密联系的信息基础教育。（施万克，2018b）

当我们致力于在各种数学教育活动中帮助有学习困难的孩子时（例如克瑞斯贝尔格&凡吕特，2003；斯图瑞盖尔德，2012；科利，沙利文，撒德哈，左普罗格鲁，2015；施万克，2013b），却只为具有数学天赋的孩子提供了少量的支持。

为了解决这个问题，我们创办了之前已经提到的“小精灵数学奥林匹克竞赛”（ZMO），这是一项一年一度为小学三年级有数学天赋的孩子们举办的竞赛，它让孩子们能够表现自己的数学才能，并和其他一样有天赋的孩子一起探讨高难度的竞赛题目。最初，这项奥林匹克竞赛是在奥斯纳布吕克的小学开展的，由于第一轮竞赛大受欢迎，一

年后就扩大了范围，至今已覆盖约 120 所小学。每个参加的班级都可以选择一位女生和一位男生作为代表，在老师的带领下参加“小精灵数学奥林匹克竞赛”，这样，相同数量的女生和男生都能够证明他们数学的天赋。从 2001 年至 2013，先后有 2102 个孩子参加，其中有 1039 位女生和 1063 位男生。男生在数量上之所以有微弱的优势，是因为最初女生被认为竞赛能力较弱，结果导致有的班级只派出了男生参赛，而没有女生。从一开始，我们就感到有义务确保女生和男生得到相同的参赛机会，幸而多年来，越来越多的参赛师生对此表示认可（对比国际数学奥林匹克竞赛，参赛的女孩仍然是例外）。在评估奥赛的成绩后，男生女生分别被划分为四组（铜、银、金、钻石，最后一组是绝对的尖子生，包括了前三名），并分别授予证书。此外，第一名的女生和男生会分别得到上一届第一名传递的“小精灵数学奥林匹克竞赛”流动奖杯，这是为了进一步强调，对女生数学天赋的赞赏应和男生一样，并让他们在数学学习中获得更多的乐趣。

十三年来，为“小精灵数学奥林匹克竞赛”开发的数学难题成为了这本书的基础财富。在进一步的工作中，我们将会大规模地收集意义深刻、非同寻常、种类繁多的题目整理成册。我们还着重对孩子们做题的步骤分析、处理原因和选择的表现方式，以及他们在数学思维中应用的策略方法进行了深刻的了解。这个综合实证数据不仅具有很高的科学依据，因为研究有数学天赋的孩子解决问题的行为相对较少，而且还为教师发掘孩子的数学潜力提供了非常实际的提示，让他们最大程度的进行数学思考，为有针对性地促进孩子的数学天赋提供了良

好的基础。

像“小精灵数学奥林匹克竞赛”一样类型和规模的项目只有通过人们的热心参与和积极互动才能取得成功。在此，我们衷心感谢所有积极的参与者：首先是热情参加竞赛的老师和孩子们，其次是奥斯纳布吕克大学参与工作的学生和员工以及所有的志愿者们。除了老师和孩子们之外，一些参加了孩子数学天赋研讨会的学生们也受益匪浅。

最后我们要感谢所有“小精灵数学奥林匹克竞赛”的赞助商，他们是奥斯纳布吕克大学协会、永舍书店以及特别感谢的格奥尔格·司马林·许特钢厂基金会（根据资助金额以及持续时间排名）。

我们希望所有的读者都能愉快地徜徉在“小精灵数学奥林匹克竞赛”的数学世界里。我们希望能够提出新的见解，了解孩子们是如何理解数学的概念、结构和过程的，并且通过积极研究的方式鼓励他们，不仅能用自己已知的解题路径，还可以另辟蹊径，创造属于自己的解题思路。最终一定能让孩子们对数学的热情日益增长。

英格·施万克

“数学早期教育”项目

参考文献

N. 科利, A. L. 沙利文, S. 撒德哈, C. 左普罗格鲁 (2015): 学习障碍及无障碍学生的纵向数学发展: 线性、二次和分段线性混合效应模型的比较。《学校心理学杂志》53 (2), 105-120

E. H. 克瑞斯贝尔格, J. E. 凡吕特 (2003): 用特殊教育法对孩子进行数学干预需要一次荟萃分析。《补救和特殊教育》24 (2), 97-114

I. 施万克 (2018a): 珍惜孩子的数学天赋——奥林匹克数学习题汇编。
Bd. 1-2 奥斯纳布吕克: 数学理论教学研究中心协会

I. 施万克 (2018b): 动态迷宫。为孩子学习信息的第一步。奥斯纳布吕克: 数学理论教学研究中心协会

I. 施万克 (2013a): 认识数学的游戏世界——数学的逻辑思维是可以学习的。奥斯纳布吕克: 数学理论教学研究中心协会

I. 施万克 (2013b): 思考的难点。由 M. 阿斯特和 J. H. 洛伦兹出版: 孩子的计算故障——神经科学、心理学、教育学 93-138, 第二次修订版。哥廷根万登出版社

I. 施万克, E. 施万克 (2015): 在儿童早期跨越文化时对数学概念的发展。由莱特主编。国际社会和行为科学的百科全书, 第二版, 772-784。

J. 斯图瑞盖尔德 (2012): 算我一个! 在数学教室包括有特殊需要的学生。千橡科文出版社

网页链接

德国数学协会: 主题: 学习, 数学是德国人最喜欢的科目。引用时间
2018年8月28日:

<https://www.mathematik.de/dmv-blog/65-studie-mathematik-ist-das-lieblingsfach-der-deutschen>

二、奥林匹克数学习题汇编

*在数学中，
提出问题的艺术远远高于解决问题。*
——【德】格尔格奥·康托尔

十三年来，“数学早期教育”项目邀请了三年级有数学天赋的孩子参加“小精灵数学奥林匹克竞赛”的头脑风暴，使他们能够在这里的挑战中遇到惊险刺激的数学问题，而在他们小学传统数学课堂的背景下极少甚至不可能接触到。最重要的并不是直接运用常规方法来处理这些问题，而是更多地发挥自己数学的想象力。

从我们对“小精灵数学奥林匹克竞赛”早期发展的经验来看，在参赛班级中选择一名女生代表和男生代表，这样的选择标准实际上成就了参赛选手中最具有数学天赋的女生和男生。这个观察结果与研究结果一致，而且显而易见，老师们都能够掌握得很好，甚至往往比标准化测量手段更好，从而认识到那些具有特殊数学天赋的学生们。（倪德河，欧文，欧文和莱利，2003；霍奇和肯普，2006）我们的项目组现在面临着开发奥林匹克习题的挑战。第一个难点在于要保证避免天花板效应，这是在任何领域解决问题时都要考虑的问题（汤普森和苏伯尼克，2010；博尔茨和多瑞，2014）。另一方面，整体的任务难度也不应太高，不能过度苛求孩子们。加强发展孩子们的数学思维和在数学学习中的乐趣始终是我们首要关注的问题，从而让数学能够有一个好名声。因此我们意识到，一些题目应该包括或高或低的项目选择性。根据第一种任务类型的处理便可以将参赛选手按照数学天赋分成

不同的等级，特别是获得珍贵的钻石奖或金奖的孩子尤为杰出。最后一种任务类型就能确保所有孩子在官方的数学奥林匹克完全成功期间得到令人振奋的经验。

除了对项目的特别关注，我们还应扩大数学主题的覆盖面，其中还应包括一些小学数学课堂的题目。

无论是孩子们面对数学问题的多样化还是面临与未知数学问题的对抗，都能让我们用数学认知研究领域的眼光深度观察孩子的数学思维。特别感兴趣的还有孩子们在没有学习标准方法的条件下处理题目时自己运用的步骤方法。这些标准方法通常是由老师传授或是示范，其中最典型的就 是书面计算方法。只有在理解这些步骤方法后才能树立数学思想，而不是一味地机械做题。（施万克，2005）

在解决问题的过程中，孩子的独立思考是受欢迎的，这样他们就可以通过自己智力的渗透来建立自己与数学的关系。因为他们还小，所以仍然可以回到成熟的数学形式主义（例如处理变量、项、方程式）。当这样的形式主义作为智力工具或者用于提高聪明才智而被运用时，（科瑞蒙，2003，171 页）他们每个人的认知能力是不同的。当孩子根据例题自己发现了一个未知的数学规律，从特殊化到一般化的普遍性总结，这样的独立思考也是受欢迎的。（参见上下文的阐述：比如口头上的抽象诠释或是几何可视化都是典型的例子——赫芬德·赫贝卡和施万克，2015，93 页及以后）

最后我们想强调的是，我们的一线任务并不是找出正确答案或是解决数学问题，而是几乎每一次任务都需要鼓励孩子们清楚肯定地陈

述出他们的答案，并解释他们使用这种策略方法的理由。诠释时可以应用计算、绘画或是口头表述。这样的任务出现在以下几种板块里：

- 如果你对此还有更多的想法，可以写在这一页上。
- 这里有充分的空位留给你思考，算一算，画一画，写一写你的答案和理由。
- 你能解释一下你的答案吗？你也可以算一算，画一画，写一写你的理由。

我们认为，激发反思过程是至关重要的，不仅是为了深入了解孩子们的思想世界，更是为了让他们通过对数学概念和运算包括计算原理有意识地思考，从而在自己的数学进程中不断变强。

从十三年以来收集的奥林匹克任务不难看出我们长期的、多样化的经验。为了提供更好的概览以及更高的易读性，我们将任务按主题而不按年份的方式进行了总结。

祝您阅读愉快！

愿您受到数学思考的激励！

参考文献

N. 多瑞，J. 博尔茨（2014）：鉴定和研究方法。海德堡：施普林格出版社

L. 赫芬德·赫贝卡, I. 施万克 (2015): 算术: 核心数字。由 R. 布鲁德, L. 赫芬德·赫贝卡, B. 施密特·蒂梅, B. 魏甘德, H. -G. 出版的数学教学理论手册: 77-115 页。柏林海德堡: 施普林格光谱出版社

K. A. 霍奇, C. R. 肯普 (2006): 在早期教育中识别天才: 教师、家长和儿童的观点。天才的教育杂志 30 (2), 164-204

S. 克瑞姆 (2003): “失读症” 或者关于几乎被遗忘的书写维度。由 S. 克瑞姆和 H. 布雷德凯普出版, 图片、文字、数字, 157-176 页。慕尼黑: 威廉·芬克出版社

K. 尼德赫, R. J. 艾琳, K. C. 艾琳, I. L. 海利 (2003): 新西兰有数学天赋的孩子。高能力研究 14 (1), 71-84

I. 施万克 (2005): 孩子不是计算器。采访: 大脑与精神 6/05, 34-37

B. E. 汤普森, R. F. 苏伯尼克 (2010): 对天赋进行研究的方法论。华盛顿: 美国心理协会



小精灵数学奥林匹克竞赛

姓名 _____

学校 _____

班级 _____

年龄 _____

我的数学老师是

祝你成功!

目录

1 细心计算	1
加减法运算	
1.1 和错误打交道	
发现、纠正、解释笔算中的错误	
1.2 策略算术	
“特别巧妙”的或者“比较巧妙”的计算方式	
1.3 未知数计算	
运用已知的计算步骤对未知数进行求解	
2 数字和运算谜题	11
完善算式，认识数字模型	
2.1 找出缺失的数字	
通过添加恰当的数字完善算式	
2.2 找到适合的运算过程	
通过添加恰当的运算过程完善算式	
2.3 火柴棍游戏	
摆放火柴棍进行计算	
2.4 认识数字模型	
通过已知的数字分布情况找出规律并运用	
3 算术规律	29
识别数列和已知算式的算术规律	
3.1 完善数列	
识别并运用规律	
3.2 特殊的加法题	
研究特殊的加法题并得出计算结果	
3.3 特殊的乘法题	
研究特殊的乘法题并得出计算结果	
4 掌握可能性	41
设法了解各种可能性，确定可能性的数量或是作出一个合适的选择	
4.1 寻找准确的排列组合	
在已知的唯一可能的条件下找到适合的排列组合	
4.2 寻找不同的可能性	
寻找若干，但不是所有的可能性	
4.3 找出所有的可能性	
将所有可能的排列组合都找出来	

目录（续篇）

5 应用题.....	57
用数学的眼光去发现文字背后的真相	
5.1 计算，找出未知数	
不是所有都是已知的，通过数学思考找寻答案	
5.1.1 初级：只有一个未知数	
5.1.2 中级：有两个未知数	
5.1.3 高级：有三个及以上的未知数	
5.2 面积、路程和距离	
有关面积、路程和距离的应用题	
5.3 统观时间上的交织点	
运用时间信息解决应用题	
5.3.1 信息增多了	
5.3.2 信息更多了	
5.4 约数和倍数	
有倍增关系的应用题	
5.5 如果...就...	
设法了解各种故事情景相交错的情况	
6 图像模型.....	87
借助图像模型进行逻辑推导思维	
6.1 辨认并延续模型	
寻找并运用规律	
6.2 许多正方形和矩形	
研究并建立模型	
6.3 确定面积	
确定并比较已知图形的面积大小	
6.4 按比例扩大	
图形在方格纸中放大	
6.5 空间想象	
借助平面描述来解决空间问题	
6.6 用剪刀和纸	
用折叠的纸剪出图形	
7 圆满收官.....	109
迷宫以及更多探险	

1 细心计算

加减法运算

1.1 和错误打交道	3
发现、纠正、解释笔算中的错误	
1.2 策略算术	6
“特别巧妙”的或者“比较巧妙”的计算方式	
1.3 未知数计算	8
运用已知的计算步骤对未知数进行求解	

① 请解答!



$$\begin{array}{r} 384 \\ + 271 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 906 \\ - 371 \\ \hline \end{array}$$

② 噢，凯凯同学算错了!



$$\begin{array}{r} 473 \\ + 364 \\ \hline 109 \end{array}$$

告诉他正确的做法:

$$\begin{array}{r} 473 \\ + 364 \\ \hline \end{array}$$

想一想，凯凯哪儿算错了?

③ 噢，安娜同学也算错了!



$$\begin{array}{r} 905 \\ - 286 \\ \hline 729 \end{array}$$

告诉她正确的做法:

$$\begin{array}{r} 905 \\ - 286 \\ \hline \end{array}$$

想一想，安娜哪儿算错了?

4 请解答!



$$\begin{array}{r} 285 \\ + 362 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 807 \\ - 453 \\ \hline \end{array}$$

5 噢，小晨同学算错了!



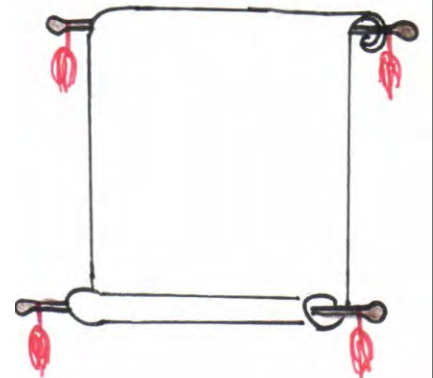
$$\begin{array}{r} 374 \\ + 265 \\ \hline 109 \end{array}$$

告诉他正确的做法:

$$\begin{array}{r} 374 \\ + 265 \\ \hline \end{array}$$

想一想，小晨哪儿算错了？

写一写，还有哪些错误在计算过程中容易出现呢？



⑥ 鲨鱼宝宝在海洋小学中思考一些数学问题。

它是这样计算的：

$$\begin{array}{r} 287 \\ + 423 \\ \hline 600 \end{array}$$



它得出的结果正确吗？

请给它一个建议，让它能够更好地计算！

想一想，鲨鱼宝宝在计算过程中应该考虑什么问题呢？

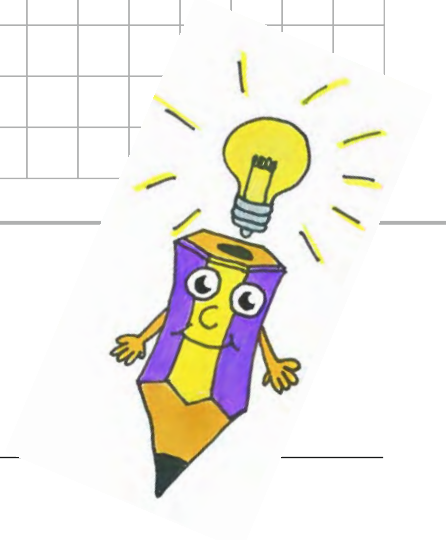
① 你能用巧妙的方式计算吗?

$$160 + 58 =$$

$$398 + 212 =$$

$$433 + 428 =$$

总结一下, 我们应该如何巧妙地计算呢?



②

你能用特别巧妙的方式计算吗？

$$127 + 398 =$$



比较巧妙的方式呢？

$$127 + 398 =$$

总结一下，我们应该如何特别巧妙地计算呢？

如何比较巧妙地计算呢？

① 请解答!

$$\begin{array}{r} 232 \\ + 116 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 575 \\ - 142 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \blacksquare 3 \\ - \blacksquare 8 \blacksquare \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 92 \blacksquare \\ - 4 \blacksquare 1 \\ \hline \end{array}$$

$$708$$

$$\blacksquare 43$$

② 你能尝试着解答一下吗?

$$\begin{array}{r} 359210457 \\ + 271653882 \\ \hline \end{array}$$



我们在计算中应该采取怎样的措施呢? 为什么?

③ 你能尝试着解答一下吗?

$$\begin{array}{r} 320 \\ - 520 \\ \hline \end{array}$$



我们在计算中应该采取怎样的措施呢? 为什么?

姓名：_____

如果你还有更多的想法，写在空白页上吧！

2 数字和运算谜题

完善算式，认识数字模型

2.1 找出缺失的数字 13

通过添加恰当的数字完善算式

2.2 找到适合的运算过程 21

通过添加恰当的运算过程完善算式

2.3 火柴棍游戏 24

摆放火柴棍进行计算

2.4 认识数字模型 25

通过已知的数字分布情况找出规律并运用

②

在丛林学校里出现了一些特殊的算式。

你能找出每种动物分别代表什么数字吗？

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{Blue Hippo} & \text{Blue Hippo} & \text{Green Frog} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 -
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \text{Rhino} & \text{Green Frog} & \text{Lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} \text{Yellow Duck} & \text{Green Frog} \end{array} \\
 \begin{array}{cc} \square & \square \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 + \\
 \begin{array}{ccc} \text{Rhino} & \text{Yellow Duck} & \text{Green Frog} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{c}
 + \\
 \begin{array}{ccc} \text{Rhino} & \text{Green Frog} & \text{Lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 + \\
 \begin{array}{cc} \text{Blue Hippo} & \text{Green Frog} \end{array} \\
 \begin{array}{cc} \square & \square \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 = \\
 \begin{array}{ccc} \text{Giraffe} & \text{Lion} & \text{Lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 -
 \begin{array}{c}
 = \\
 \begin{array}{ccc} \text{Elephant} & \text{Lion} & \text{Lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 = \\
 \begin{array}{ccc} \text{Rhino} & \text{Lion} & \text{Lion} \end{array} \\
 \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \end{array}
 \end{array}$$

说一说，你是如何找出这些合适的数字的呢？

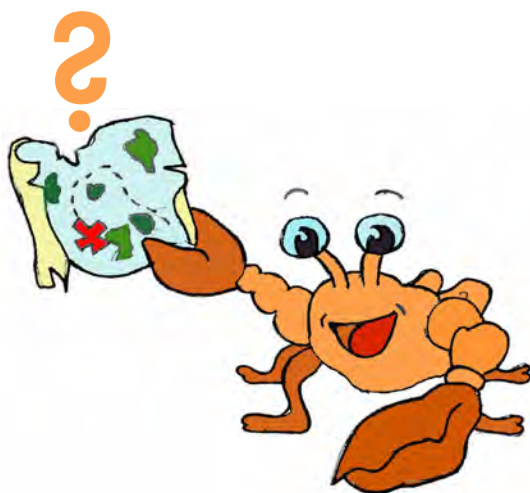
⑤ 螃蟹宝宝有一张藏宝图。

在寻宝之路上有如下提示:

$$\heartsuit - \text{hexagon} = 2$$

$$\heartsuit : \text{trapezoid} = 2$$

$$\text{hexagon} + \heartsuit = 18$$

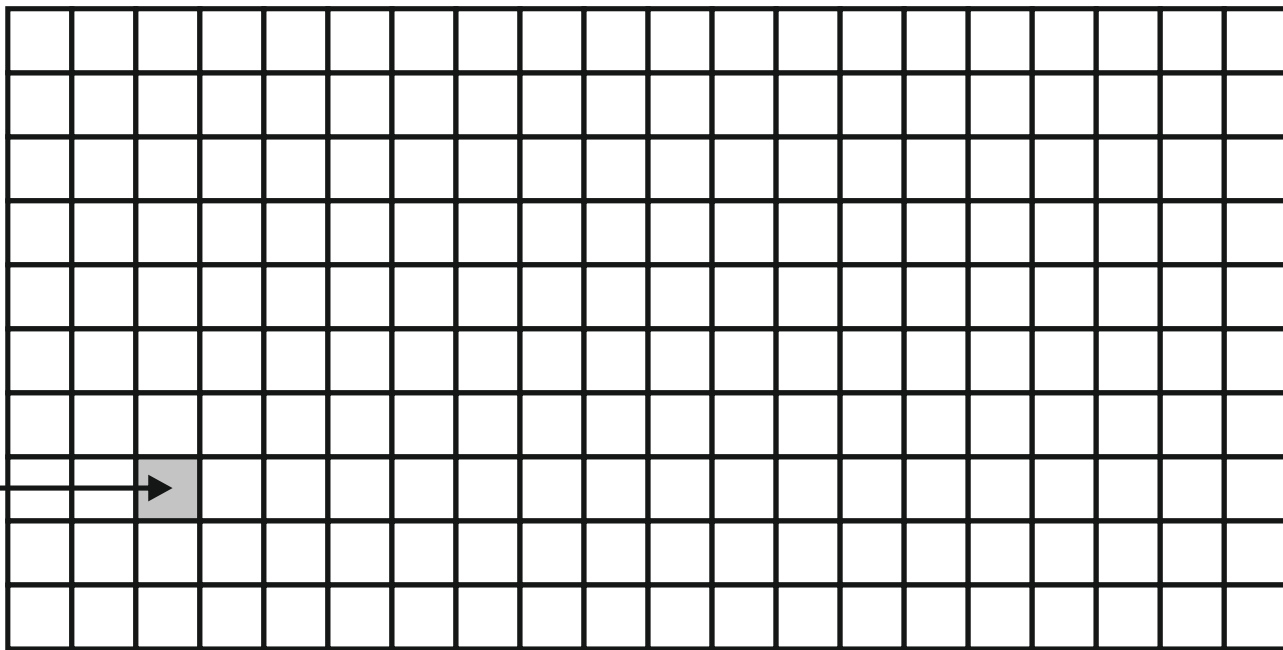


这样走就能找到宝藏:

从开始向右走  步, 向上走  步, 向左走  步。

你能画出寻宝路线吗?

起
点



说一说, 你是怎样找到寻宝之路的呢?

⑥ 毛毛同学是一个骰子迷。他在思考以下几道题:

$$\boxed{\text{●}} + \boxed{2} = \boxed{\text{▲}}$$

$$\boxed{\text{●}} \cdot \boxed{2} = \boxed{\text{◆}}$$

$$\boxed{\text{●}} - \boxed{2} = \boxed{\text{■}}$$

$$\boxed{\text{●}} : \boxed{2} = \boxed{\text{■}}$$

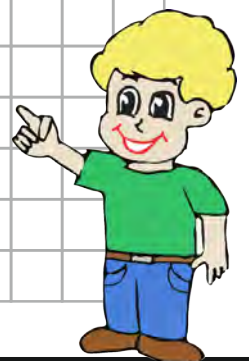
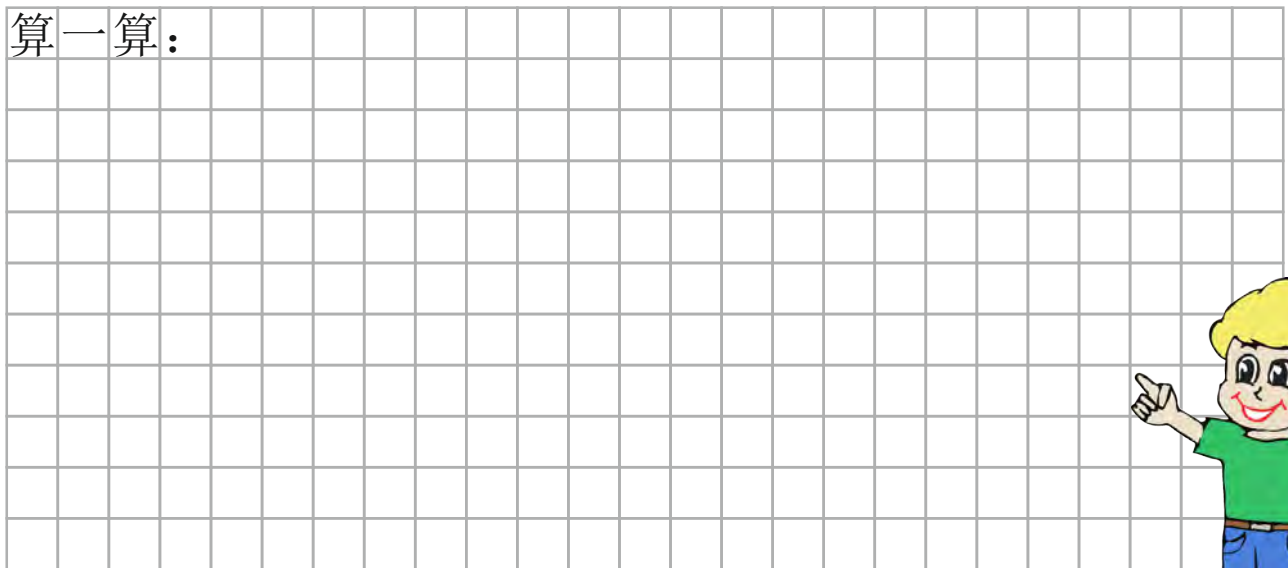
毛毛找到了 $\boxed{\text{●}}$ 代表的数字, 他让以下的算式得到了结果18:

$$\boxed{\text{▲}} + \boxed{\text{■}} + \boxed{\text{◆}} + \boxed{\text{■}} = 18$$

想一想, $\boxed{\text{●}}$ 代表什么数字呢? _____

我们不需要把每一个数字都尝试一遍, 因为:

算一算:



⑧ 苏珊同学的数字谜题。

她想了两个数字，

并且为这两个数字列了一个算式。

$$\square - \diamond = 2$$

猜一猜，她能想到哪些数字呢？

解释一下你得出的答案吧！



苏珊又为这两个数字列了一个算式，此时两个算式同时成立。

请注意：在计算第二个式子的时候，顺序应为先乘法，后减法。

$$\square - \diamond = 2$$

$$\square \cdot \square - \diamond \cdot \diamond = 20$$

现在你能准确地说出苏珊想的是哪两个数字了吗？

解释一下你得出的答案吧！

① 莉莉同学喜欢做数字游戏。她特别喜欢计算。

今天她在思考一个问题，怎样才能计算中得到0呢？

你有什么想法吗？说一说。



莉莉想完成下列算式，

并且只能做加减法运算。

$$\boxed{5} \diamond \boxed{4} \diamond \boxed{3} \diamond \boxed{2} \diamond \boxed{1} \diamond \boxed{=} \boxed{0}$$

以上的算式能够成立吗？为什么？



③ 艾米同学喜欢做“数字树”的游戏。

在这一页上你能够看到树上有她的最终答案 **7**。她将两片树叶连接在一起，要么做加减乘除运算，要么直接合成一个新的数，得到的结果也按照同样的方法进行拼凑，直到所有的树叶都由一根树枝连接起来，产生的数就是树上的最终答案。

树枝之间不能相互交叉，树叶的顺序不能颠倒。

试一试，你能得到其他树上的最终答案吗？

带有数字 **3** 的树特别简单哦！

1 2 3 4 5 6

$1+2=3$

34

$3+34=37$

$37+5=42$

$42:6=7$

1 2

3

1 2 3

4

1 2 3 4

5

1 2 3 4 5

6

① 思思同学喜欢玩火柴棍游戏。她摆放了一个算式：

$$\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array}$$



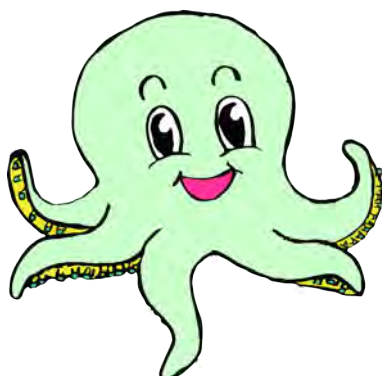
她肯定地说：“我只用移动一根火柴，就能得到一个新的、正确的式子！”

试一试，你能把她想的新算式画出来吗？

① 章鱼宝宝喜欢做数字游戏。

它把数字写在贝壳上，然后把这些贝壳放在海底。

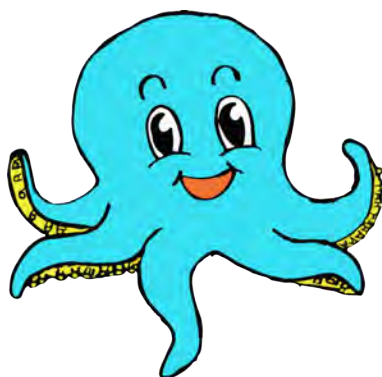
2	3	5
5	1	4
3	6	1



它一边摆放贝壳一边思考，会发生什么呢？有哪些规律可以运用呢？

章鱼宝宝的朋友也摆放了一个模型。

1	2	6
5	4	0
3	3	3



他自信地说：“我的规律适用于我们俩的模型！”

想一想，它说得对吗？你能找到一个规律，使其适用于以上两个模型吗？

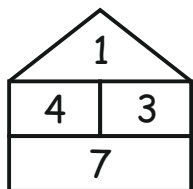
② 老大、老二、老三、老四、老五都住在数字大道上。

这周他们想把房子用数字装饰一下。

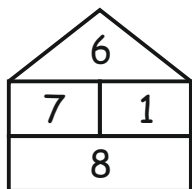
老大、老二、老三已经装饰好了，
你能帮老四和老五也用数字装饰一下吗？



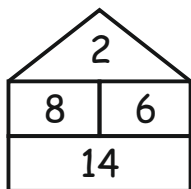
老大



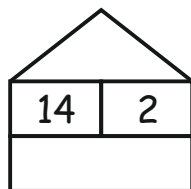
老二



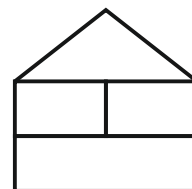
老三



老四



老五



想一想，男孩们能为他们的数字装饰找到什么规律呢？不止一种哦！

姓名：_____

如果你还有更多的想法，写在空白页上吧！

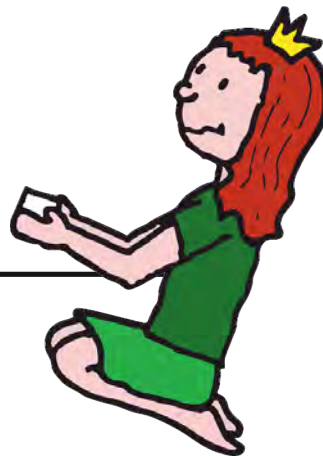
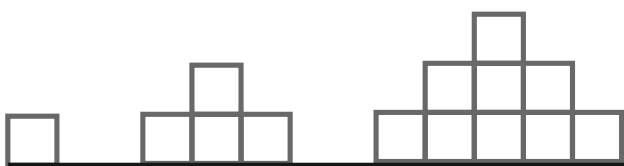
3 算术规律

识别数列和已知算式的算术规律

3.1 完善数列	31
识别并运用规律	
3.2 特殊的加法题	35
研究特殊的加法题并得出计算结果	
3.3 特殊的乘法题	37
研究特殊的乘法题并得出计算结果	

① 米娅公主喜欢玩小纸片，并计算它们的数量。

她摆放了以下一系列纸片：

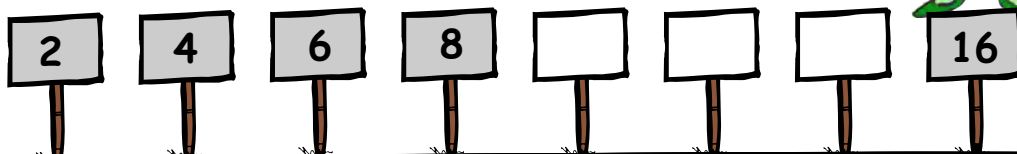


想一想，接下来应该如何摆放？

她应该怎样计算呢？

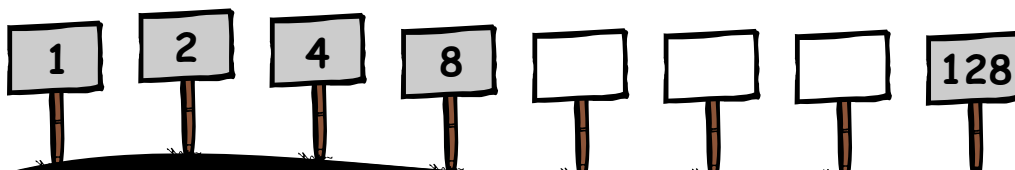
- ② 在童话小镇里，有一个坏女巫施展黑魔法，把小镇里的一些数字变没了。

你能帮助村民们重建出这漂亮的数列吗？



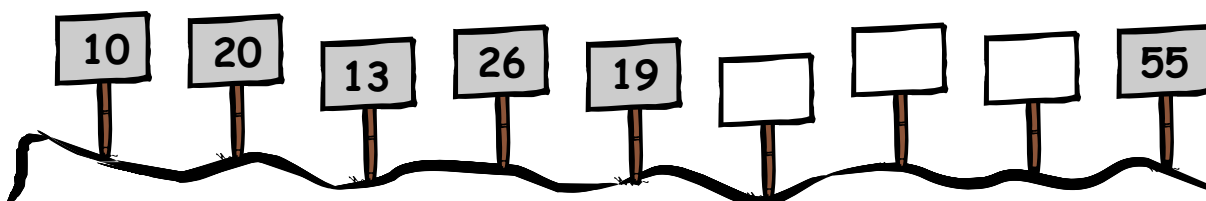
想一想，再将数字填写在空的标牌上。

说一说，为什么你的数字是非常适合的？



想一想，再将数字填写在空的标牌上。

说一说，为什么你的数字是非常适合的？



想一想，再将数字填写在空的标牌上。

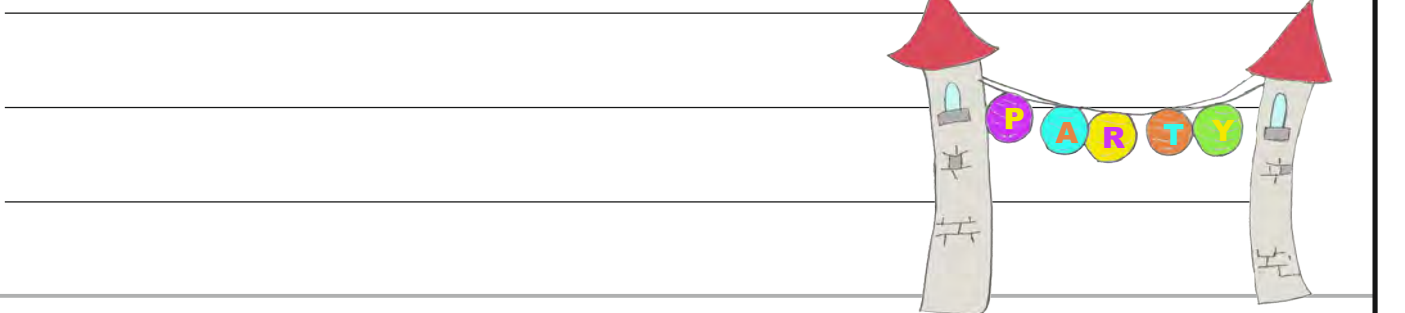
说一说，为什么你的数字是非常适合的？

③ 住在城堡的孩子们很喜欢数字。为了庆祝节日，他们制作了一些带有数字的彩带。

想一想并填一填第一条彩带上的数列：



我能很轻松地找出接下来的数字，因为：



想一想并填一填第二条彩带上的数列：



我能很轻松地找出接下来的数字，因为：

想一想并填一填第三条彩带上的数列：



我能很轻松地找出接下来的数字，因为：

④ 丽萨同学很喜欢数字。她特别喜欢数列。请继续填写！

丽萨的第一列数字：

4, 8, 12, 16, , ,

她想：接下来的数字我可以很轻松地算出，因为：

丽萨的第二列数字：

2, 4, 8, 16, , ,

她想：接下来的数字我也能很轻松地算出，因为：

丽萨的第三列数字：

1, 4, 9, 16, , ,

她想：接下来的数字我仍能很轻松地算出，因为：

丽萨发现：三个数列中都有4和16的存在。

想一想，还有其它数字都存在于三个数列中吗？具体是哪些？



① 乐乐同学想出了几道算术题，请解答。

$$2 + 3 + 4 =$$

$$4 + 5 + 6 =$$

$$6 + 7 + 8 =$$

$$21 + 22 + 23 =$$



乐乐想出了这些特殊的算术题。

她是如何选择这些数字的？

乐乐断定，这些题的答案都是很特别的数字。

你能说出答案的特殊之处吗？

想一想，为什么这些答案如此特殊？

这样的规律也会出现在许多类似的算术题中吗？

②

佩佩同学想做特殊的加法运算。

她开始写下第一个数字：42。

然后她交换了两个数字的位置并记下来：24。

她将两个数字加起来： $42 + 24$ 。

最后得到的结果是：



佩佩又写下了一个数字：53。

然后她交换了两个数字的位置并记下来：35。

她将两个数字加起来： $53 + 35$ 。

最后得到的结果是：



说一说，你能从这两个结果中发现什么？

佩佩想：如果我在 10 到 99 的数字里任意挑选一个作为开始，那么我就能在这个特殊加法运算中一直得到一个特别的结果。

你认为正确吗？

在这里写下你的想法和答案：

② 蒂姆同学最喜欢的数字是：4、9、16、25、36……
你能从中发现什么吗？

请你补充三个他喜欢的数字：



蒂姆想经常使用他最喜欢的数字。
如果他要算 3×5 ，那么他就用 4×4 来代替，得出的结果再减去1。
请你像他一样计算并且将下列的表格补充完整！

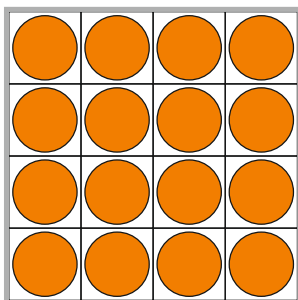
题目	蒂姆的计算方式		结果
3×5	$4 \times 4 = 16$	$16 - 1 = \square$	$3 \times 5 = \square$
4×6	$5 \times 5 = \square$	$\square - 1 = \square$	$4 \times 6 = \square$
7×9	$\square \times \square = \square$	$\square - 1 = \square$	$7 \times 9 = \square$

为什么蒂姆能够用他的计算方法一直得到正确的答案？
你可以把自己的想法用数轴、线段、任意字符或者点子图等多种形式展现出来。
选择一个你喜欢的方式吧！

在这里写下你的想法和答案：

③ 珂珂同学特别喜欢数学模型。

他觉得这个模型特别棒：



珂珂解释道：

“这个模型帮助了我。我能够在模型中看到 4×4 就等于 $3 \times 5 + 1$ 。”

想一想，这个模型适合他的算式吗？说说理由！

珂珂自豪地说：

“运用这个数学模型诀窍能够很快找到用相邻数表示的算式。”

请你模仿珂珂的方法，利用相邻数写出右边题目相应的算式。

$$3 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 \times 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6 \times 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

珂珂的数学模型诀窍能够运用于所有两个因数相同的乘法运算吗？

解释一下你的答案！也可以把你的想法画下来。

4 掌握可能性

设法了解各种可能性，
确定可能性的数量或是作出一个合适的选择

4.1 寻找准确的排列组合 43

在已知的唯一可能的条件下找到适合的排列组合

4.2 寻找不同的可能性 49

寻找若干，但不是所有的可能性

4.3 找出所有的可能性 50

将所有可能的排列组合都找出来

①

萍萍画家喜欢在画画前先做一个计划。

为了绘制一面新墙，她想先画一个用颜色黑、红、黄构成的模型。

请将模型补充完整。

黑	黄	
红	黑	
黄	红	



说一说，为什么你填写的数字非常合适？

萍萍又想出一个用四种颜色构成的模型。

黑	蓝		
红	黑		
黄	红		
蓝	黄		←

她想，将模型补充完整有哪些可能性呢？给她提个建议吧！

哪一种颜色适合填在箭头指出的方框内？请说说理由！

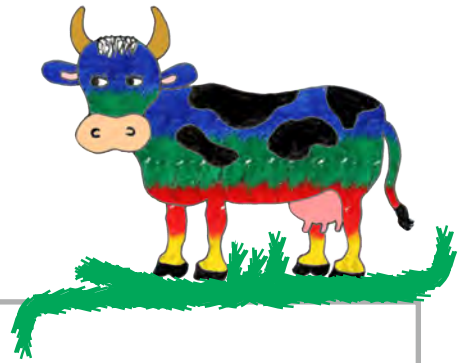
② 农场主给他养的奶牛称重。他发现：

牛大比牛二轻，

牛三比牛四重5千克，

牛二比牛四重3千克，

牛四没有牛大重。



请按重量为奶牛排序。

写一写，画一画你的答案。

哪头奶牛最轻？ _____

哪头奶牛最重？ _____

③

小凡、小欧、小静、小天、小艾和小丽是好朋友。

他们一起坐公交车去郊游。

他们非常开心地找到了紧挨着的三排双人座。

小凡坐在小天和小欧前面，

小静坐在小天旁边，

小丽坐在小欧的旁边以及小静的前面。



想一想，他们在公交车里是怎样安排座位的？

你能在下面的座位表中分别填上对应的名字吗？

试一试

写一写

座位	座位
----	----

座位	座位
----	----

座位	座位
----	----

座位	座位
----	----

座位	座位
----	----

座位	座位
----	----

说一说，小艾的旁边、后面以及前面分别坐着谁？解释一下你的答案吧！

4

邮递员来到修道院送信。

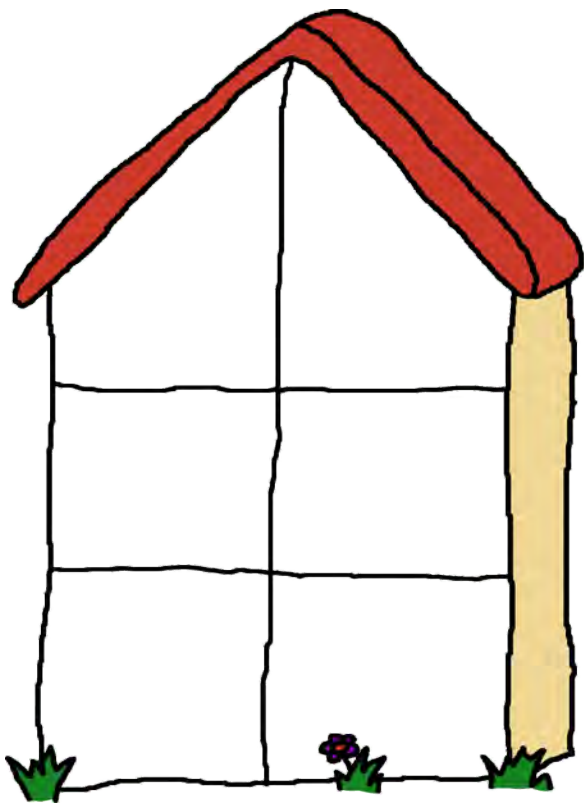
他记得住户们的位置：

小杰住在小西的左边，小安住在小飞的右边，

小杰住得比小飞高，小西住得比小马低，

小马和小杰不都住在右边。

可惜的是，邮递员没有记住小白的住处。



你能帮助他找到各位住户吗？

请将名字填进房子里！

说一说，小白住在哪里？为什么？

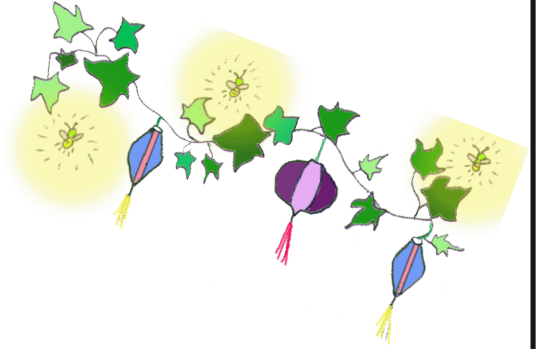
⑤

小菲和她的朋友们坐在圆桌前。

小菲坐在小贝和小妮的中间，她的对面坐着小娜。

小吉坐在小娜的左边，同时也和小妮面对面。

还剩一个空位是留给小雅的。她坐在哪儿呢？



在空白处留下你的想法吧！

算一算，画一画，写一写你的答案和理由。

⑥

人鱼宝宝有三顶帽子，

分别是一顶毡帽、一顶草帽和一顶皮帽。

三顶帽子的颜色分别为红色、蓝色和绿色。

三顶帽子上分别有一根羽毛、两根羽毛和三根羽毛。



这是它出的一道帽子谜题：

- 带有一根羽毛的帽子不是绿色。
- 毡帽不是红色且比皮帽少一根羽毛。
- 蓝色帽有三根羽毛。
- 皮帽不是带有两根羽毛的帽子。

你能找出每个帽子分别是什么颜色吗？

你能找出每个帽子带有几根羽毛吗？

算一算，画一画，写一写你的答案和理由。

① 彬彬同学想买一支1元7角1分的冰淇淋。

他在钱包里找到了这些硬币：

三枚1元、

三枚5角、

三枚2角、

三枚1角、

三枚5分、

三枚2分。



想一想，他能怎样准确地支付冰淇淋的费用？

请列出五种不同的支付方式，用同样的硬币只交换顺序是行不通的哦！

第一种方式：_____

第二种方式：_____

第三种方式：_____

第四种方式：_____

第五种方式：_____

说一说，你是怎样解决的？

①

彼特同学在课余时间掷骰子。













他会掷两个骰子，并将两个数字加起来计算总分。

第一次他掷出了  。这代表8分。

想一想，掷两个骰子，他最少能得到多少分？

再想一想，掷两个骰子，他最多能得到多少分？

请将下列表格填写完整，填出所有可能的分数。

						
	2	3				
	3					
						
						
						
						

彼特继续掷了很久骰子，一共竟然掷了1000多次！

想一想，哪个分数出现的次数可能是最频繁的呢？

说一说你的答案和理由。

② 狗狗小A、小B和小C正在举办一场汪星人秀。

它们分别坐在三个不同的箱子上。



当然这个位置不是固定的，它们过一会儿就要重新分配箱子。

想一想，有哪些不同的可能性呢？

小A、小B和小C可以这样坐：

小A、小B和小C一共有 _____ 种不同的坐法。

说一说，在寻找所有的可能性时我们要注意什么？

③

吉姆和库诺在发明单词。

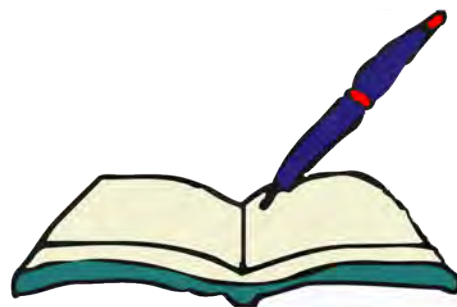
这些单词由4个字母组成，分别是 **a**、**e**、**n**、**g**。

单词中的最后一个字母一直都由 **n** 或者 **g** 结尾，
并且每一个字母只能使用一次。

吉姆首先拼出了 **aeng**。

库诺认为，他们一定能发明许多新单词！

绝对能超过100个！



想一想，他们究竟能发明多少个新单词呢？

请将所有的可能性写下来。

一共能发明

_____ 个新单词。

说一说，为什么依照以上的规则他们无法发明出更多的单词呢？

4

人鱼宝宝的衣橱里装满了漂亮的蝴蝶结。

它一共拥有5种不同颜色的蝴蝶结：

红色、蓝色、绿色、橙色、紫色。

每天它都会佩戴三个不同颜色的蝴蝶结。

想一想，它一共有多少种选择呢？



在空白处算一算，画一画，写一写你的答案和理由吧！

5

精灵宝宝在思考穿什么服装庆祝节日。

它有四件不同的毛衣，

一条红色、一条蓝色、一条黄色的裤子

以及两顶不同的绒球帽。

它一定会穿一件毛衣、一条裤子并戴一顶绒球帽。

这样的搭配有很多的可能性，

想一想究竟有多少种？

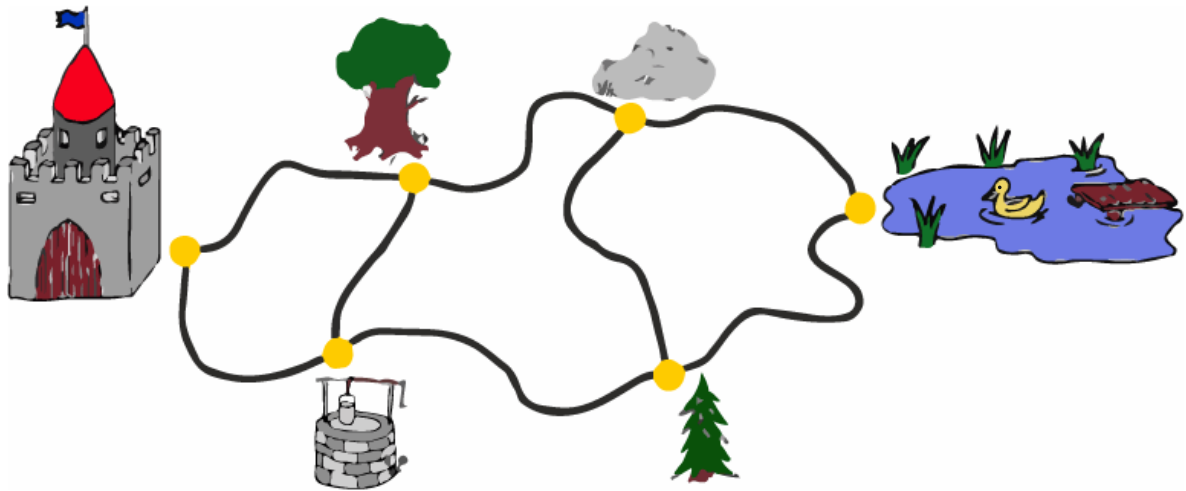


在空白处算一算，画一画，写一写你的答案和理由吧！

⑥

酷酷王子喜欢骑着马四处游玩。

从城堡出发到海边他有很多路线可以选择。



他想：从城堡骑马到海边我究竟有多少条路线可以选择呢？

我可不想一段路骑两遍。

酷酷王子一共有 _____ 种选择。

写一写你的答案和理由！你可以将路线画出来。

5 应用题

用数学的眼光去发现文字背后的真相

- 5.1 计算，找出未知数 59
不是所有都是已知的，通过数学思考找寻答案
- 5.1.1 初级：只有一个未知数 59
- 5.1.2 中级：有两个未知数 62
- 5.1.3 高级：有三个及以上的未知数 68
- 5.2 面积、路程和距离 73
有关面积、路程和距离的应用题
- 5.3 统观时间上的交织点 78
运用时间信息解决应用题
- 5.3.1 信息增多了 78
- 5.3.2 信息更多了 81
- 5.4 约数和倍数 82
有倍增关系的应用题
- 5.5 如果...就... 82
设法了解各种故事情景相交错的情况

② 玲玲同学每天都给她的小鹿喂同样多的饼干。

五天时间玲玲喂了它30块饼干。

那么请问两天时间玲玲喂了它多少饼干？

答一答：_____



能解释一下你的答案吗？

你可以在空白处算一算，画一画，写一写你的理由。

③ 在一棵巨大的古树上栖息着许多小鸟，包括它们的领头鸟洛基。

而旁边的古树上坐着黑猩猩泡泡和沫沫。

泡泡朝着小鸟喊道：“嘿！200只小鸟你们好！”

洛基发话了：“我们的队伍可没这么壮大。

不过你要是把我们的数量翻一倍，

然后把你们俩也算进来，

那我们就有200只在树上啦！”



请问，究竟有多少只小鸟栖息在古树上？_____

在空白处留下你的想法吧！

算一算，画一画，写一写你的答案和理由。

① 猜一猜，这两个小精灵多少岁了呢？



年龄： 岁

我们俩加起来有40岁啦！

我可是比你大了30岁呢！



年龄： 岁

解释一下你的答案吧！

你可以算一算，画一画或写一写。

② 托尼村长家里养了绵羊和小猪，他的姐姐玛丽也养了绵羊和小猪。

他们一共养了30只动物。

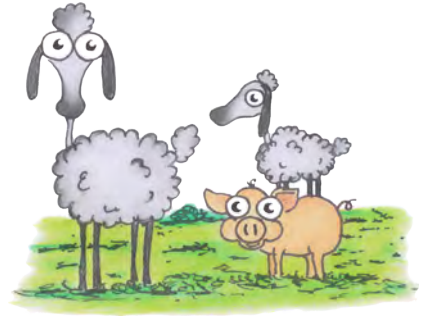
村民们经过他们家门口说道：“这真是太有趣了！”

玛丽养的动物和托尼养的动物的腿一样多！”

想一想，

托尼养了多少只动物？ _____

玛丽养了多少只动物？ _____



在空白处留下你的想法吧！

你可以算一算，画一画或写一写。

③ 玛丽向她的邻居出售了五只羊。

每一只棕羊标价105元。

每卖出一只白羊她能够再多赚15元。

邻居买下五只羊付给了她570元。

想一想，在被售出的羊里，有多少只是白羊？



解释一下你的答案吧！

你可以算一算，画一画或写一写。

④ 在“鱼岛酒店”里有着32间卧室和57张床。

每间卧室里摆放着两张或者一张床。

想一想，有多少间卧室只有一张床？ _____

有多少间卧室有两张床？ _____

解释一下你的答案吧！算一算，画一画，写一写。



拥有一张床的卧室每晚标价25元。

拥有两张床的卧室每晚标价30元。

峰峰一家人和他们的朋友住了一晚付了305元。

想一想，他们可能订了多少间带一张床的卧室？ _____

他们可能订了多少间带两张床的卧室？ _____

解释一下你的答案吧！算一算，画一画，写一写。

⑤

丫丫同学想在市场上买椰子。

店主非常喜欢算术，于是她在价格牌上写到：

“6个浅色椰子和8个深色椰子18元。

9个浅色椰子和4个深色椰子15元。”

丫丫出门没带多少钱，

她只想买一个浅色椰子和一个深色椰子，

为此她需要付多少钱呢？

丫丫需支付 _____ 元。



在空白处留下你的想法吧！

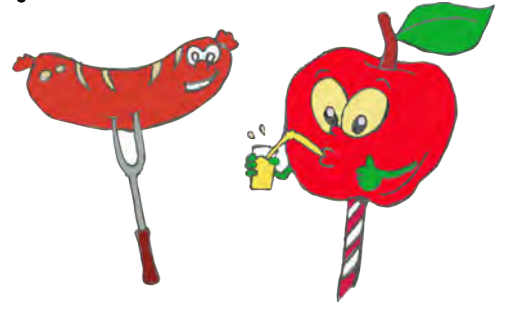
你可以算一算，画一画或写一写。

⑥

诺诺同学给自己和朋友们买了两根烤肠和六杯苹果汁。

她一共支付了12元6角。

已知两根烤肠和三杯苹果汁一样贵。



想一想，一根烤肠多少钱？ _____

一杯苹果汁多少钱？ _____

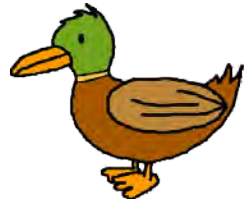
解释一下你的答案吧！

你可以算一算，画一画或写一写。

①



一只小兔和它的笼子共重4千克，
一只小鸭和同样的笼子共重5千克，
小鸭和小兔一共重3千克。
请问，笼子多重？



答案： _____

解释一下你的答案吧！

你可以算一算，画一画或写一写。

② 伊伊公主喜欢远足。上个星期，她徒步旅行三天，一共走过了48千米。

其中，星期三走过的路程是星期一的两倍，

星期五走过的路程是星期一的三倍。

请问，在这三天中，她每一天走了多远的路程？

星期一： _____

星期三： _____

星期五： _____



能解释一下你的答案吗？也可以算一算，画一画或写一写你的理由。

③ 微微同学自言自语道：

“在我的开心农场里生活着四种不同的动物，它们的总数为104。

绵羊和小猪的数量是相同的，

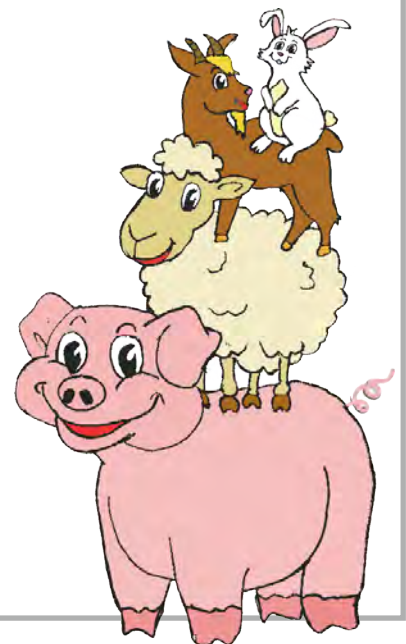
小兔比山羊多两只，

小猪比山羊少一头。”

请问，微微同学拥有多少只绵羊，多少头小猪，多少只小兔以及多少头山羊呢？

解释一下你的答案吧！

你可以算一算，画一画或写一写。



④ 小厨师今天去买水果：一袋苹果、一袋梨和一袋橙子。

一袋苹果和一袋梨的价格相等，

一袋橙子比两袋苹果贵10元，

一共她要花掉26元。



请问，一袋橙子多少钱？买一袋橙子她需要支付 _____ 元。

解释一下你的答案吧！在下方空白处算一算，画一画或写一写。

①

有一座花园要建一个新的栅栏。

它长84米，宽60米，

但要留下两扇门的位置，每扇门宽4米。



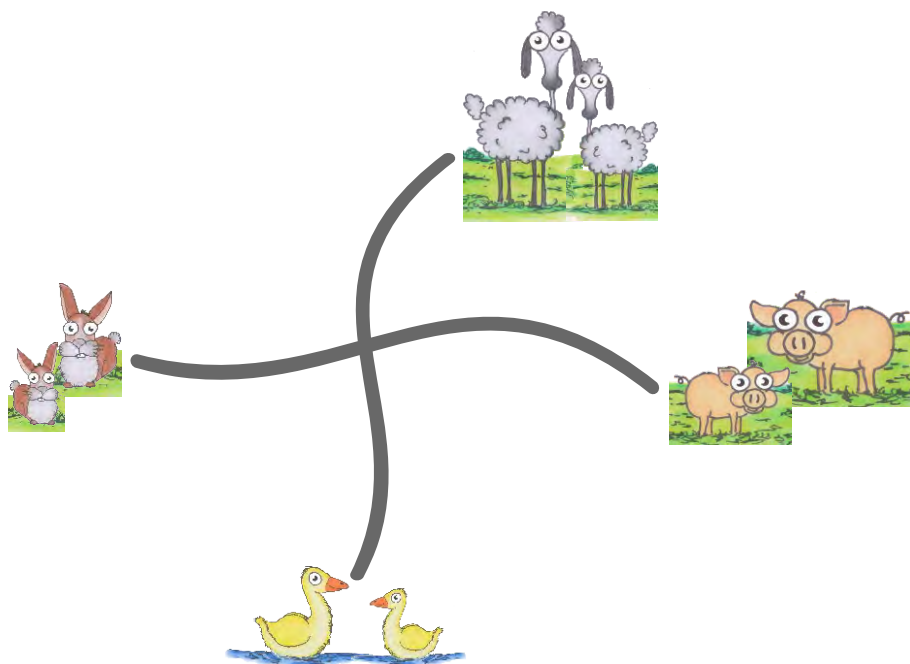
想一想，应该购买多少米的栅栏呢？

解释一下你的答案吧！

你可以算一算，画一画或写一写。

③ 双胞胎蒂娜、茜娜为了运动会在加强锻炼。

她们还画了一张跑步的路线图。



蒂娜说：“我们先从兔子家跑120米到绵羊家，然后再跑140米到小猪家，接着再跑100米到鸭子家，最后再跑回兔子家。”

茜娜举双手赞同，说：“太棒啦！那最后一段路就是最短的一段路。”

你认为，茜娜说得对吗？他们从鸭子家到兔子家有多长的路程？

解释一下你的答案！你也可以画出来。

④

米歇尔和皮娅在同一所学校上学。

米歇尔住在离学校3千米的地方，而皮娅家离学校4千米远。

午饭后皮娅骑着自行车去找米歇尔，她要骑多远的路呢？

不止一种情况哦。



想一想，画一画：

我是这样找到答案的：

⑤

苏苏和乐乐是好朋友，他们一起在同一所小学上学。

苏苏住在离学校2千米的地方，而乐乐家离学校有3千米远。

放学后，他们俩经常会聚在一起玩耍。

今天乐乐想骑着自行车到苏苏家玩，他选择了一条最短的路。

请你想一想，他所走的路程可能有多长？

请注意，有很多种可能哦！



在空白处留下你的想法，写下你的答案吧！

说一说，为了找到最短路程，为什么会出现这么多种可能呢？

①

海马宝宝想去拜访人鱼哥哥。

现在是十点钟，但海马宝宝还差20米才能到达目的地。

它想，游2米需要花14分钟，不过中途不再休息了。

那么它应该在 _____ 点就能够到达了！

解释一下你的答案！

也可以算一算，画一画或写一写你的理由。



但事实上海马宝宝提前遇见了人鱼哥哥。

因为人鱼哥哥在十点钟的时候也出发朝海马宝宝游去，它14分钟就能前进3米。

想一想，它们是什么时候相遇的呢？ _____

解释一下你的答案！也可以算一算，画一画或写一写你的理由。

② 小精灵维维、凡凡、素素正在准备节日礼物。

维维在一个小时内能包装4份礼物。

凡凡在一个小时内能包装5份礼物。

素素在一个小时内能包装6份礼物。

今天，维维悄悄地提早起了床，结果等凡凡和素素开始时他已经包装好8份礼物了。

凡凡吹牛道：“只需要两个小时我就能赶上维维！”

素素反驳道：“你不行，我才可以在两个小时后赶上维维！”

你认为谁对谁错呢？凡凡什么时候才能赶上维维呢？素素呢？

解释一下你的答案！

也可以算一算，画一画或写一写你的理由。



③ 爱丽、贝拉和赛娜用陶土制作盘子。

爱丽在一个小时内可以做4个盘子。

贝拉在一个小时内可以做5个盘子。

赛娜在一个小时内可以做6个盘子。

今天，爱丽悄悄地提早起了床，

结果等贝拉和赛娜开始时她已经做好8个盘子了。

贝拉吹牛道：“只需要两个小时我就能赶上爱丽！”

赛娜反驳道：“怎么可能？只有我才可以在两个小时后赶上爱丽！”

你认为谁对谁错呢？贝拉和赛娜究竟什么时候才能赶上爱丽呢？



在空白处留下你的想法吧！

算一算，画一画或写一写。

① 起床太困难了！

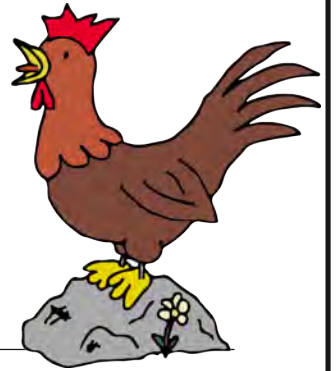
在营帐里骑士们是这样做的：所有的骑士轮流醒来并且叫醒仍在睡觉的骑士。

他们动作十分迅速，叫醒一名骑士只需一分钟。

今天，当公鸡叫时，所有的骑士还在熟睡，

除了一位年轻的骑士醒了过来，这时刚刚7点钟。

请问，有多少位骑士在7点01分是醒着的呢？请解释！



那么，有多少位骑士在7点02分是醒着的呢？请解释！

那么，有多少位骑士在7点03分是醒着的呢？请解释！

7点10分，所有的骑士都醒过来了。他们一共有多少人？请解释！

① 聪聪老师带着三年级二班的23个同学到溜冰场玩耍。

每一张门票的价格是3元。

聪聪老师已经收集到了64元，但这让他感到非常惊讶。

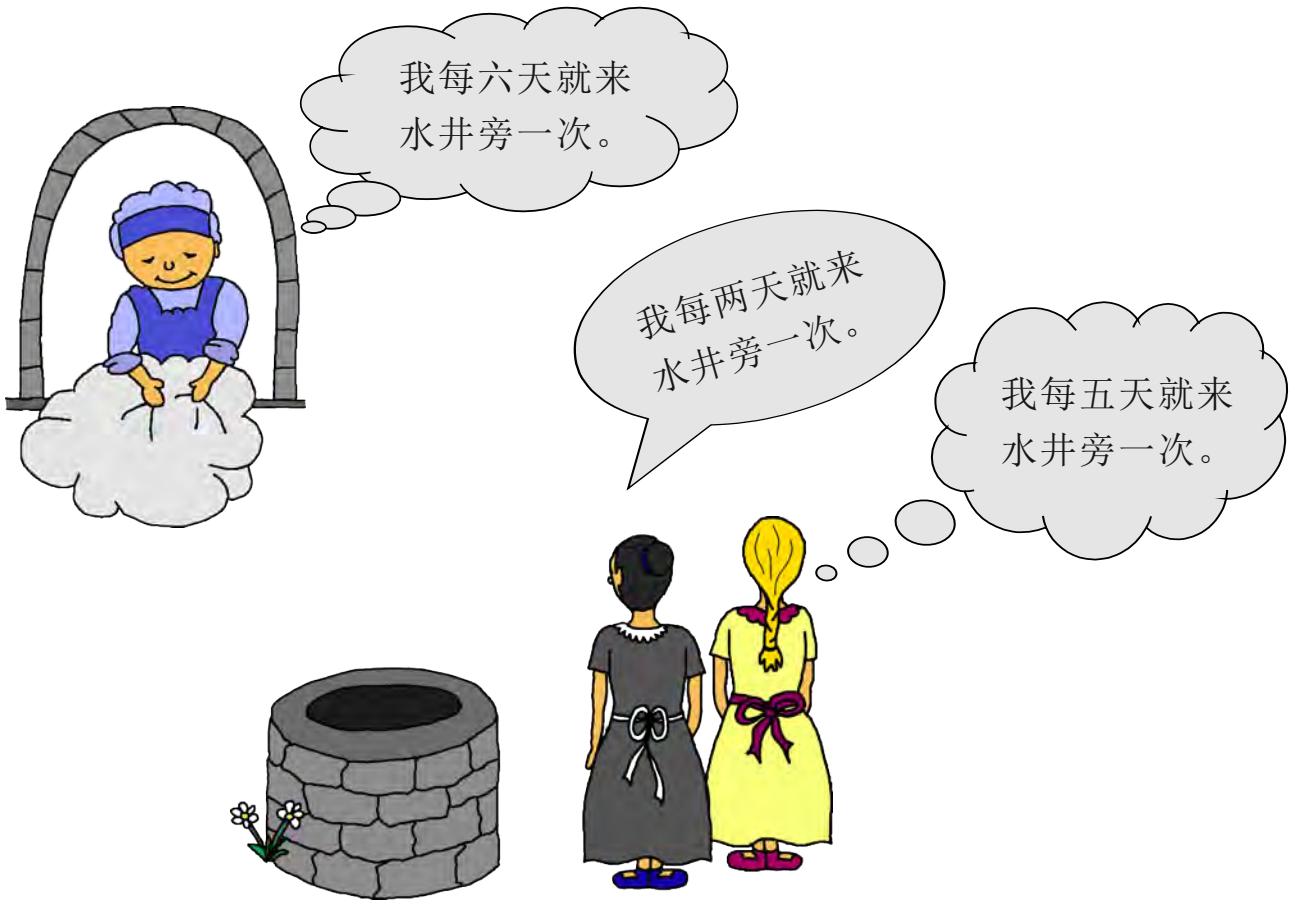
为什么？



请问，买门票一共需要花费多少钱呢？_____

算一算，画一画或写一写你的答案和理由。

② 这是一个星期天，佩姨，高婶和胡妈在水井前相遇了。



请问，三人再次相遇水井旁要经过多少天？

说一说你的答案和理由。

你也可以算一算，画一画，写一写。

① 今年的海洋运动会会有十支队伍将参加水球比赛。

每个队伍会和其他的队伍比赛两次。计分方式为金分和锈分。

如果一个队伍输掉了一场比赛，那么他们的分是这样计算的：

→ 如果输家还有金分，就必须交出一金分。

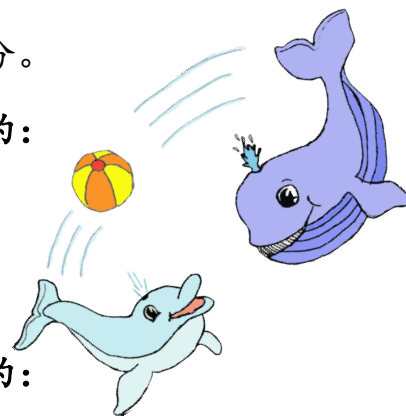
→ 如果输家没有金分，就得到一锈分。

如果一个队伍赢得了一场比赛，那么他们的分是这样计算的：

→ 如果赢家还有锈分，就应该交出一锈分。

→ 如果赢家没有锈分，就得到一金分。

如果双方打平，那么各自的分值都不发生变化。



在今年的第一场比赛中出席的是海豚队和鲸鱼队，最后海豚队获胜。

你能说一说它们各自的得分情况吗？

章鱼队获得了最终的胜利！你能说一说它们参加了几场比赛吗？

章鱼队最终获得了三金分！

想一想，章鱼队赢得了几场比赛呢？输掉了几场呢？打平了几场呢？

② 奶奶在贝尔生日时送了他一个水族箱，里面游着漂亮的小鱼。

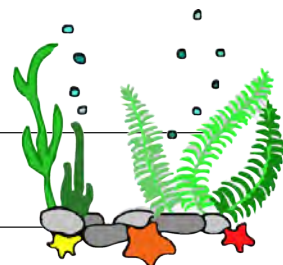
其中有6条红鱼，3条蓝鱼和9条绿鱼。

这些鱼儿很特别，因为它们能够变换颜色。

当一条红鱼接触到一条绿鱼的时候，两条都会变成蓝色。

当一条红鱼接触到一条蓝鱼的时候，两条都会变成绿色。

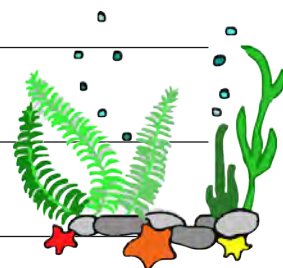
你能找出什么规律吗？说说理由！



如果一条红鱼接触到一条红鱼的时候，它们俩还是保持红色。

如果一条绿鱼接触到一条绿鱼的时候，它们俩还是保持绿色。

你能找出什么规律吗？说说理由！



想一想，贝尔会不会有一天看见所有的鱼都变为一种颜色呢？

说一说你的想法。

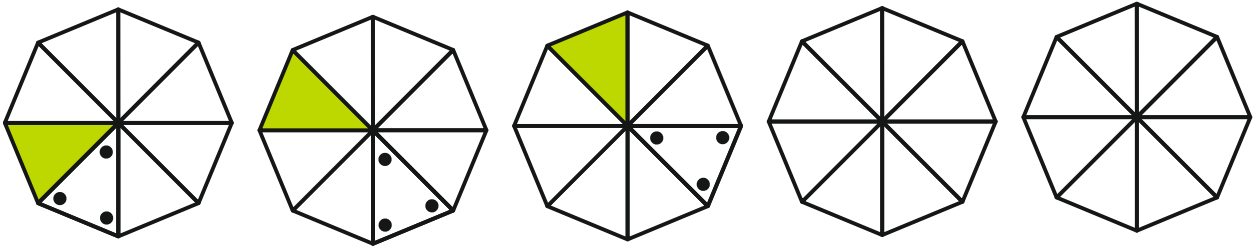
6 图像模型

借助图像模型进行逻辑推导思维

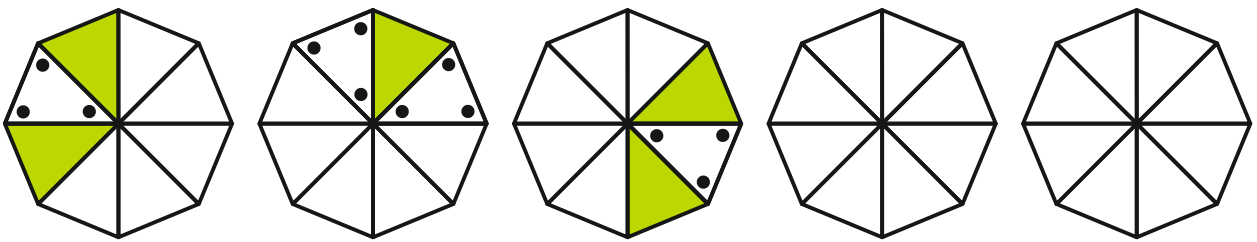
6.1 辨认并延续模型	89
寻找并运用规律	
6.2 许多正方形和矩形	94
研究并建立模型	
6.3 确定面积	96
确定并比较已知图形的面积大小	
6.4 按比例扩大	100
图形在方格纸中放大	
6.5 空间想象	101
借助平面描述来解决空间问题	
6.6 用剪刀和纸	105
用折叠的纸剪出图形	

1

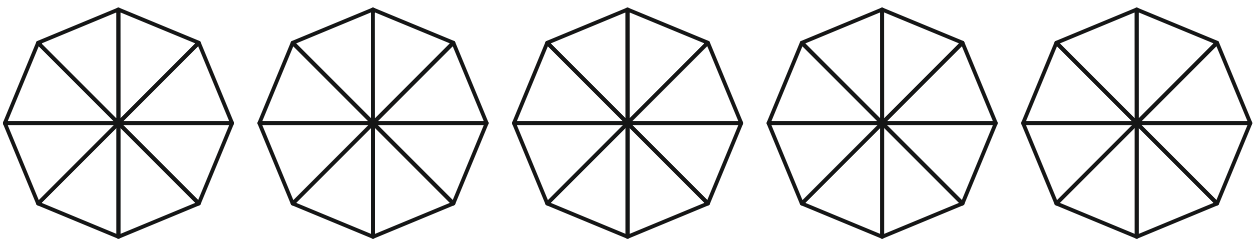
马丁同学喜欢设计图像模型。你能在空白图形中继续画吗？



请继续画出马丁的下一个图像模型。



你能自己设计一组有难度的图像模型吗？



说一说，为什么你设计的图像模型有难度呢？

②

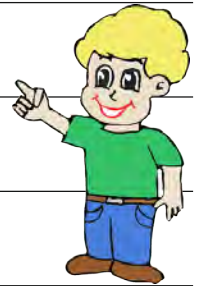
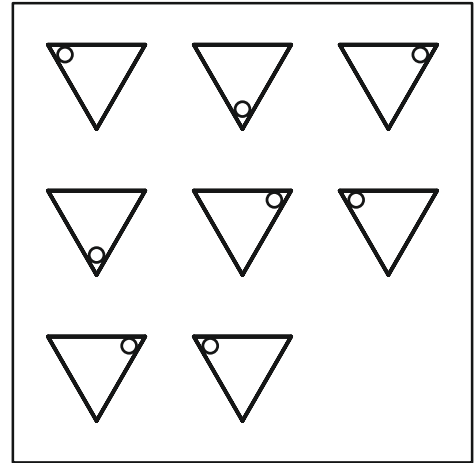
提莫同学正在画一些很特殊的图像。

可惜他的思绪被打断了，结果没有完成。

原本在右下方的空位处还要画点儿什么，

你能帮他完成吗？

说一说为什么要这样画呢？



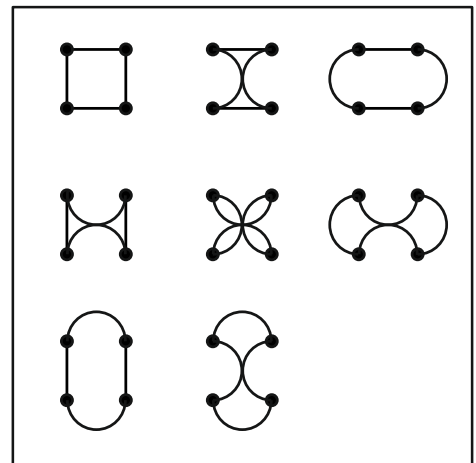
安娜同学也在画一些很特殊的图像。

可惜她的思绪也被打断了，结果没有完成。

原本在右下方的空位处还要画点儿什么，

你能帮她完成吗？

说一说为什么要这样画呢？

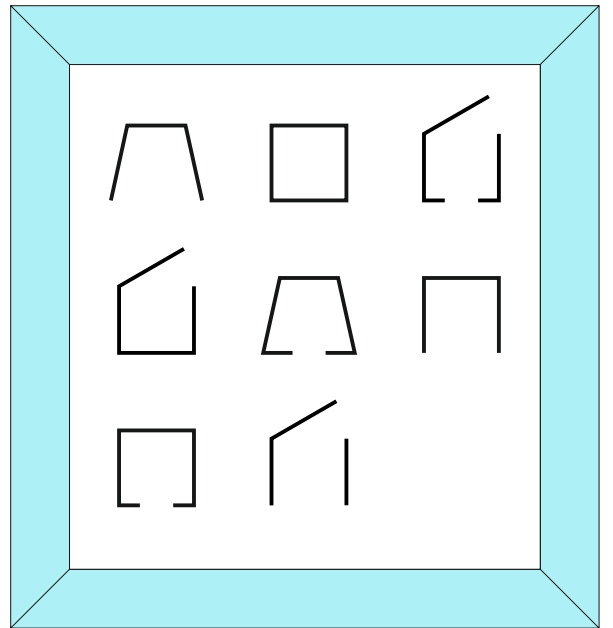


③ 小精灵回家了！不过开门不需要钥匙，而是要解开一个谜题。

帮小精灵开开门！

提示：右下角缺了点儿什么，
把你的想法画出来吧。

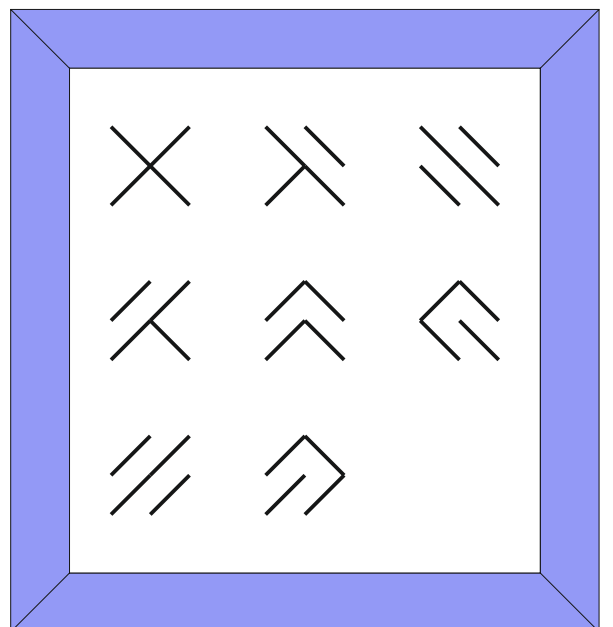
说一说，为什么这样就能把门打开了呢？



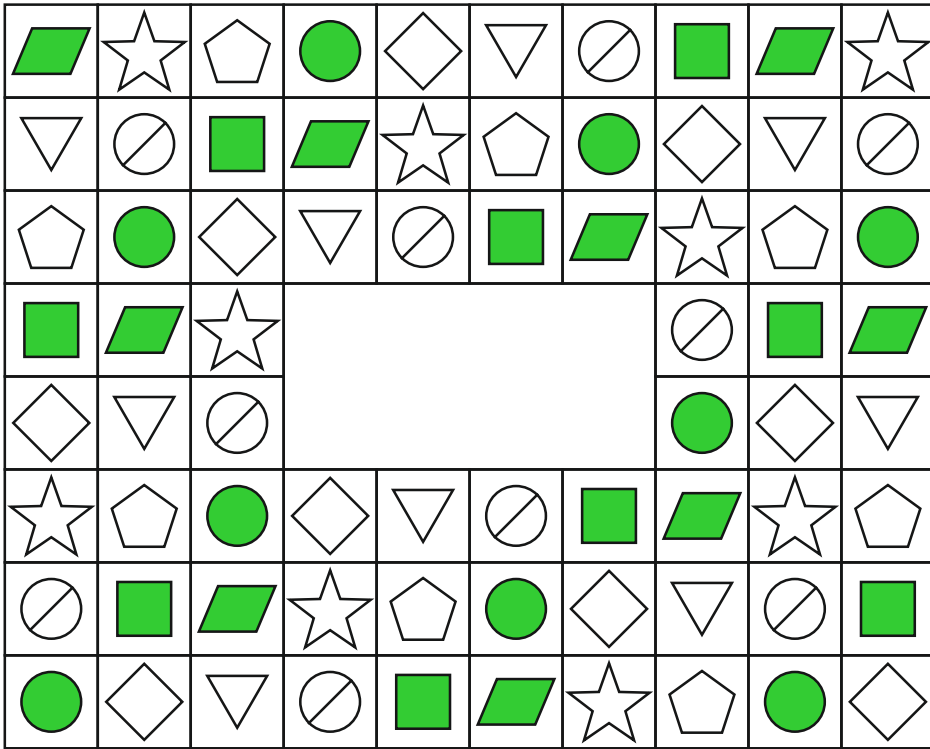
帮小精灵开开门！

提示：右下角缺了点儿什么，
把你的想法画出来吧！

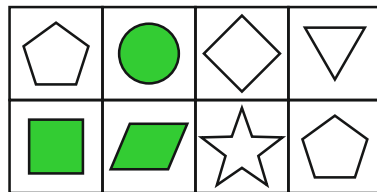
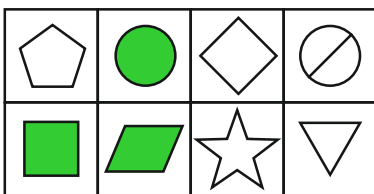
说一说，为什么这样就能把门打开了呢？



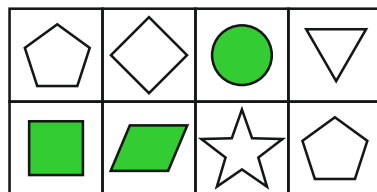
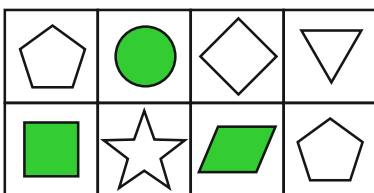
④ 仔细瞧，中间有一处空白。



你能在以下四个选项中找出哪一组图案是最适合这处空白的吗？



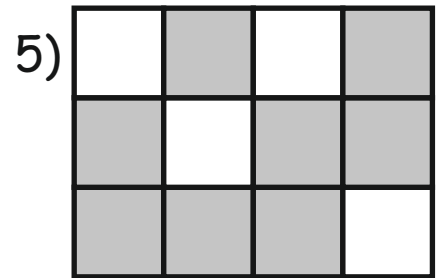
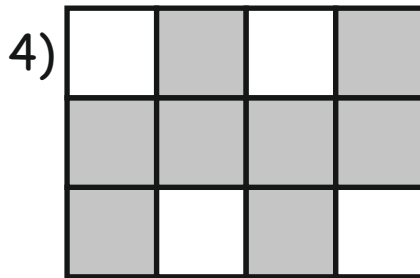
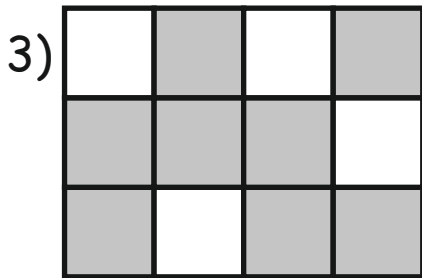
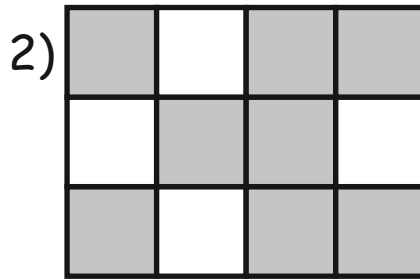
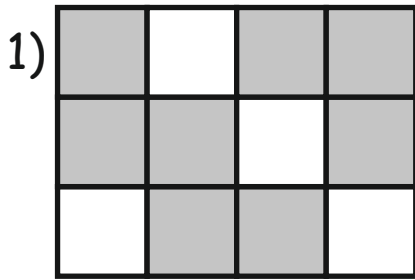
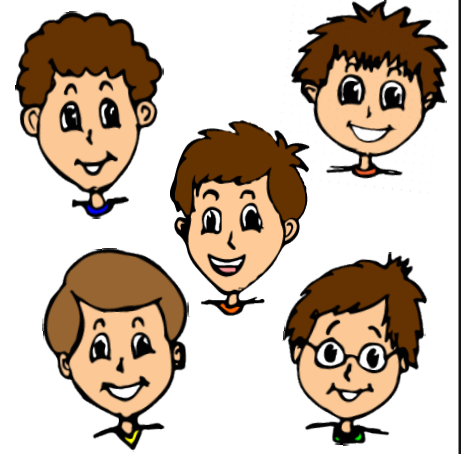
?



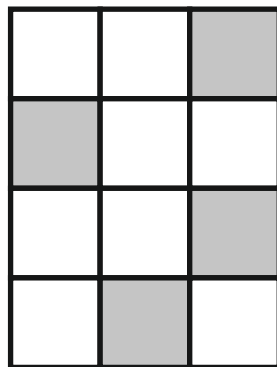
说一说，为什么你选择的这一组图案是最适合的呢？

5 5个兄弟在玩小纸片。这些小纸片一面灰一面白。

他们拼出了5个这样的图案：



观察以下图案，上面哪一个是与它最匹配的呢？ _____



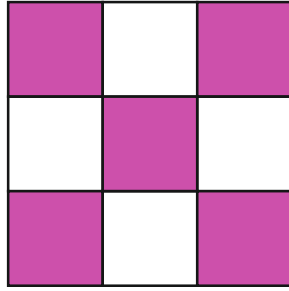
解释一下你的答案吧！

①



我看到了9个正方形!

我看到了好多好多正方形!



说一说，你能看到多少个正方形呢？

答案：_____

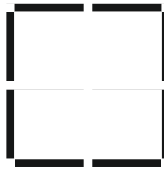
能解释一下你的答案吗？写一写，画一画！

② 汤姆同学有很多火柴。他想用火柴摆出四边形。

一开始他用了4根火柴，这样就只能摆出一种四边形。

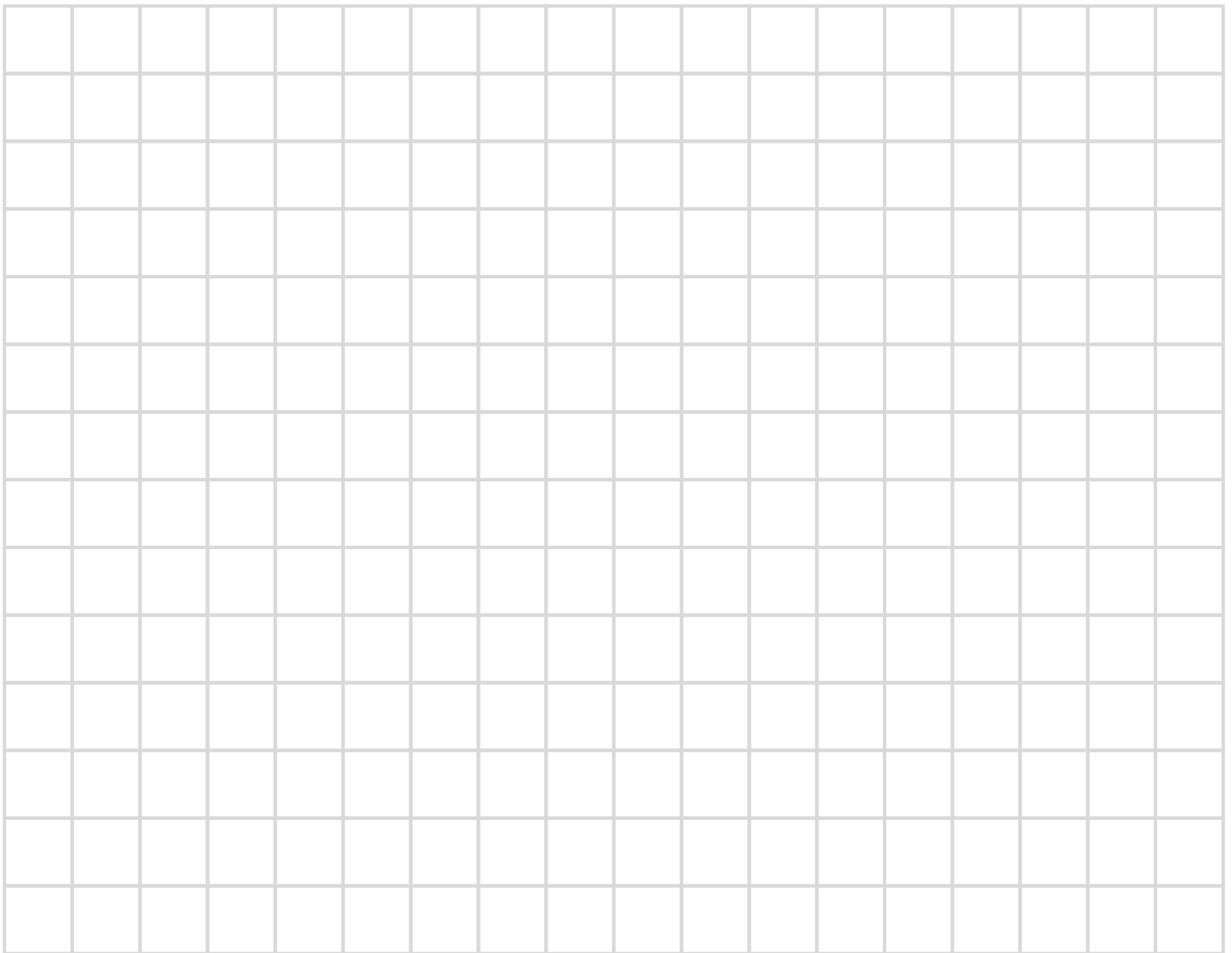


现在他用了8根火柴，
这样就可以摆出两种四边形了。



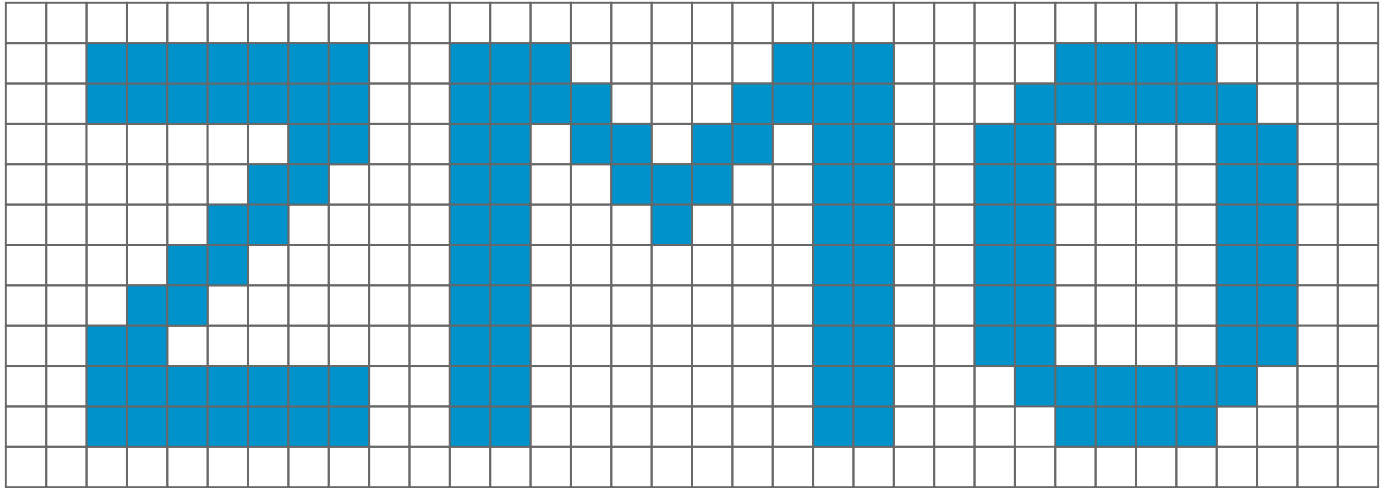
接下来他用了18根火柴。

请问，这样他能摆出多少种四边形呢？ _____ 在下面的空格中画一画吧。



你能想到什么？ _____

① 蒂娜同学在格子纸内画了三个字母:



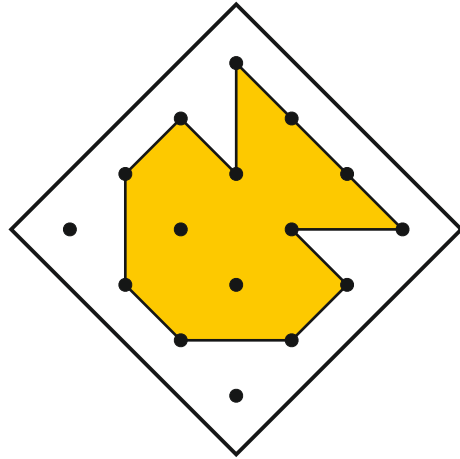
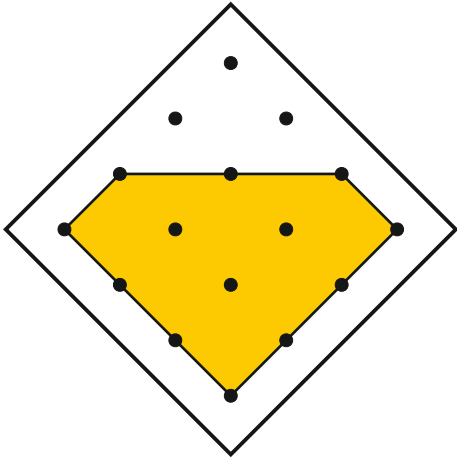
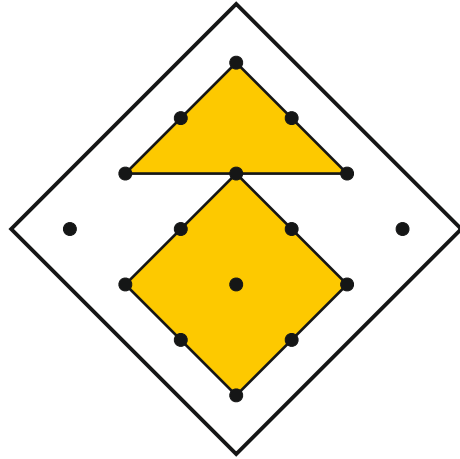
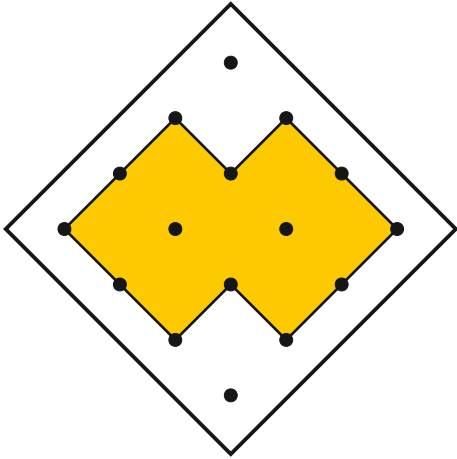
哪一个字母占用的格子最多呢? _____

哪一个字母占用的格子最少呢? _____

我是这样找到答案的:



② 观察下列图案中黄色的形状!

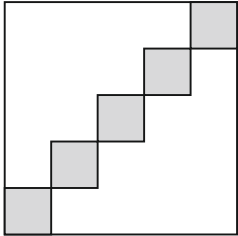


你能想到什么?

③ 塔拉同学有150块灰色的小方片。

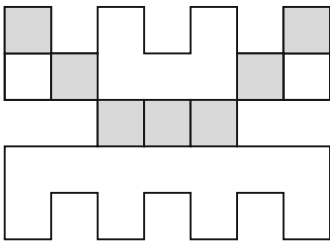
她开始摆放以下的两种图案。

想一想，她为此要用多少块小方片？请解释一下你的答案。



塔拉为此要用 _____ 块小方片。

理由： _____



塔拉为此要用 _____ 块小方片。

理由： _____

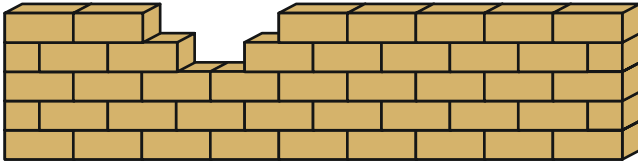
你能想到什么？

4

这是一个顽皮的小妖精。

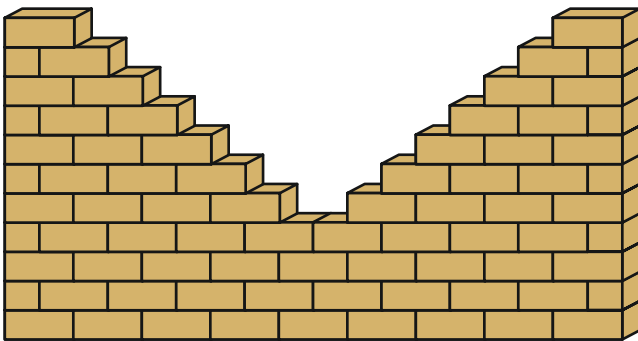
它从这堵墙上偷走了三块砖头。

但它还想拿走更多的砖头。



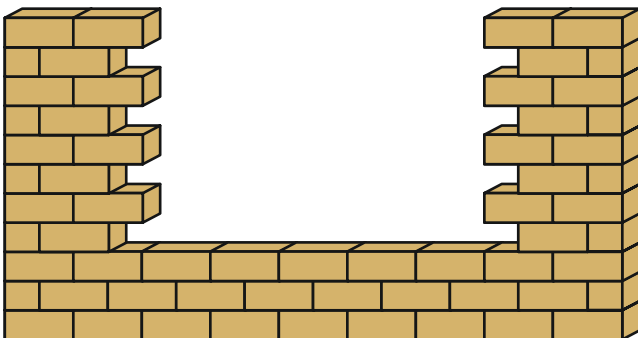
请问，它从这堵墙上偷走了多少块砖头？

解释一下你的答案吧！



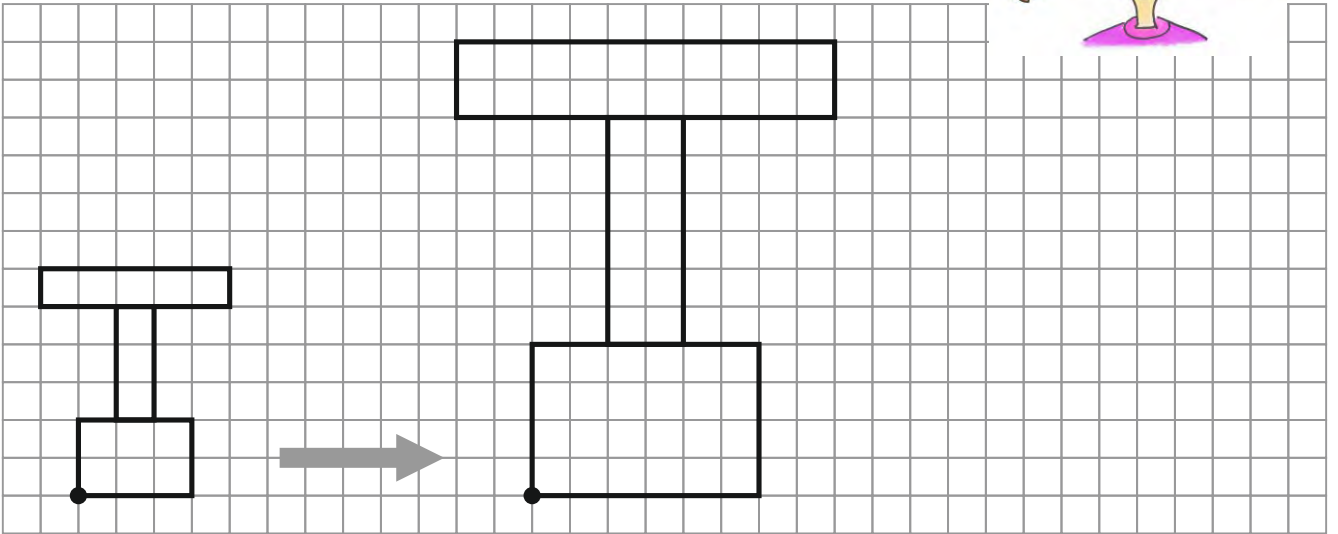
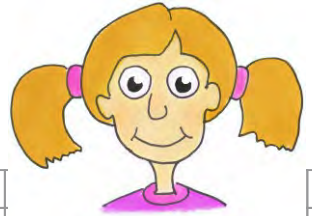
请问，它又从这堵墙上偷走了多少块砖头？

解释一下你的答案吧！



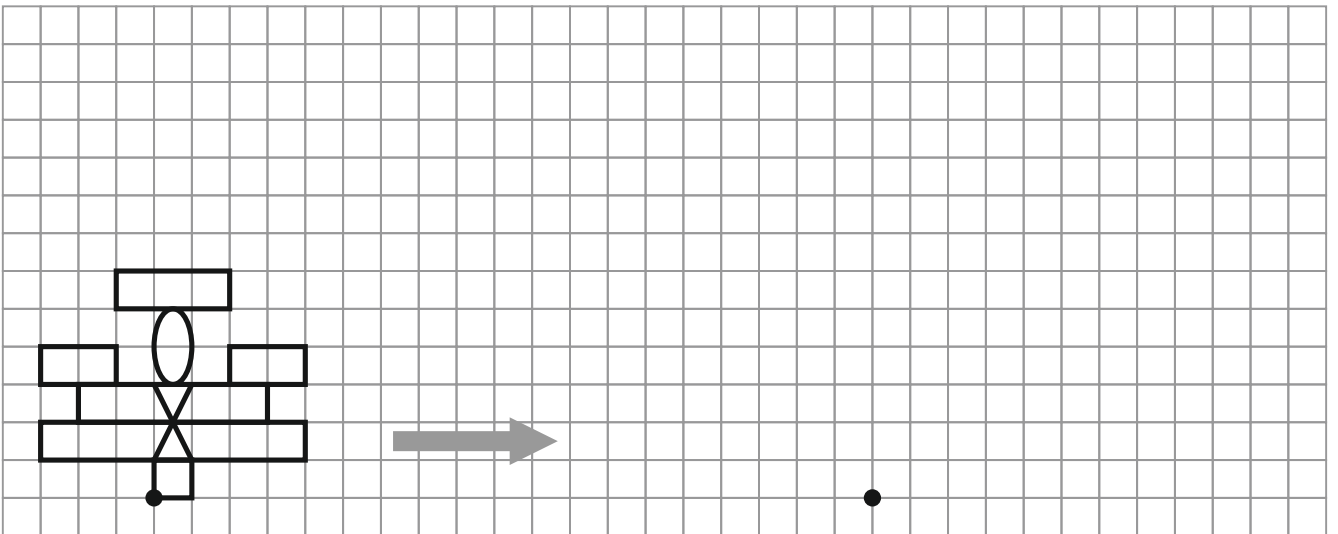
① 泽娜同学特别喜欢画画。

今天她在练习放大图像。



泽娜又画了一个新图案。

你能按照泽娜的方法，也将这幅图放大吗？

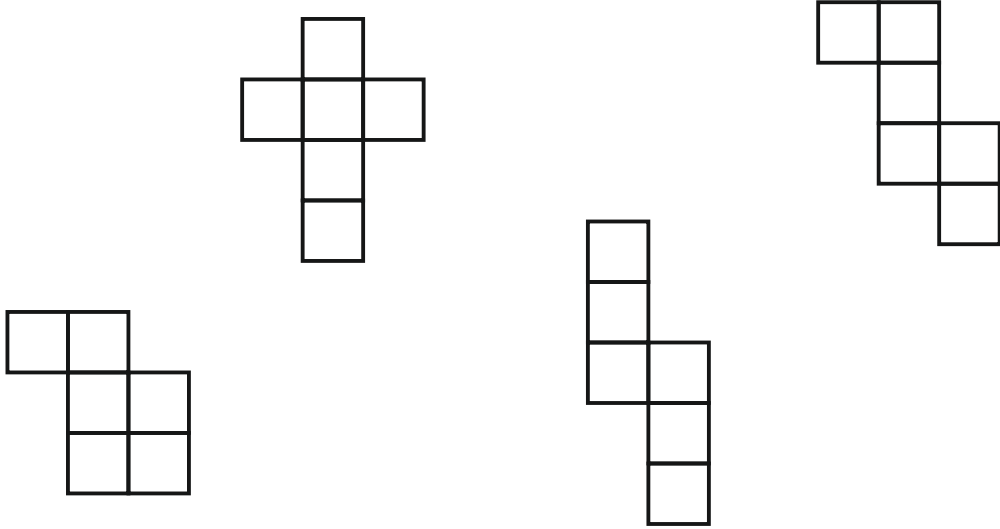


说一说，你是如何放大的呢？

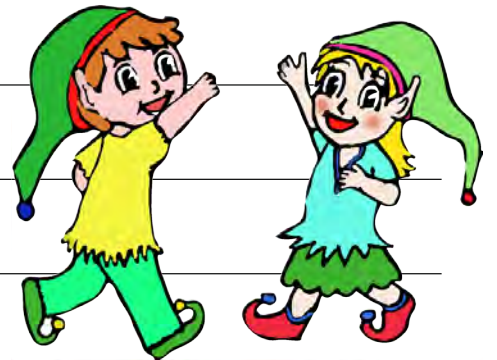
① 在庆祝节日的时候，小精灵们想玩骰子。

它们有几个模板，可以把骰子动手做出来。

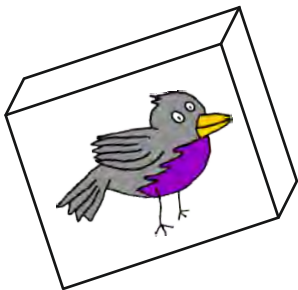
看看下面几幅图，哪些模板可以制作出骰子呢？



能说说你的理由吗？



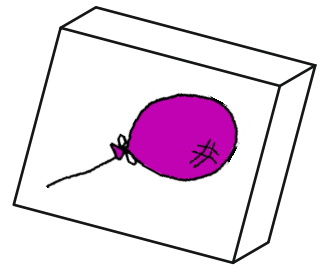
2



卡罗同学在玩一个小匣子。

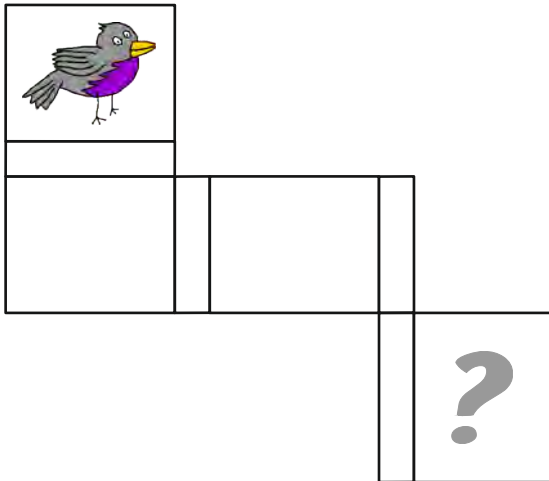
匣子的正面画着一只小鸟，

背面画着一个气球。

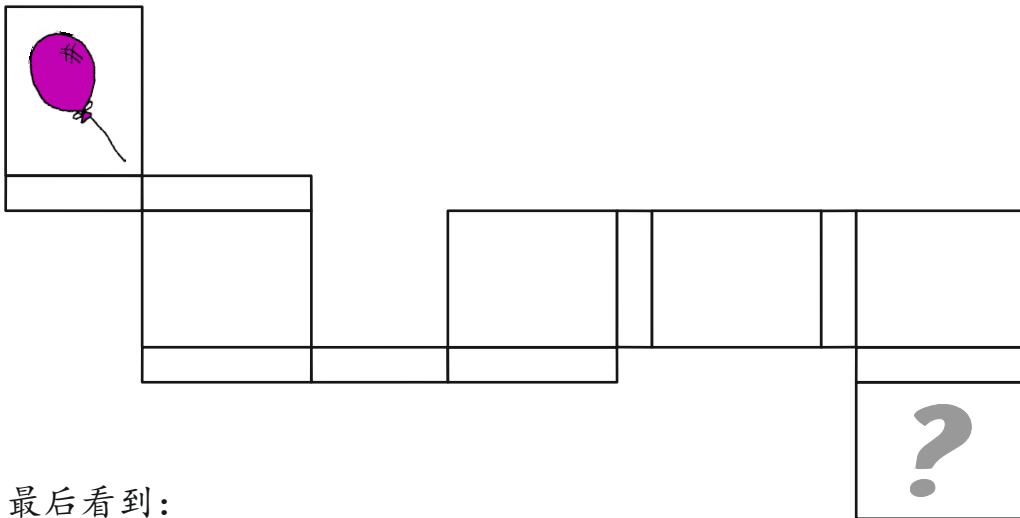


他沿着一条路径十分小心地翻转着匣子。

说一说，最后他能看见小鸟还是气球呢？



最后看到：

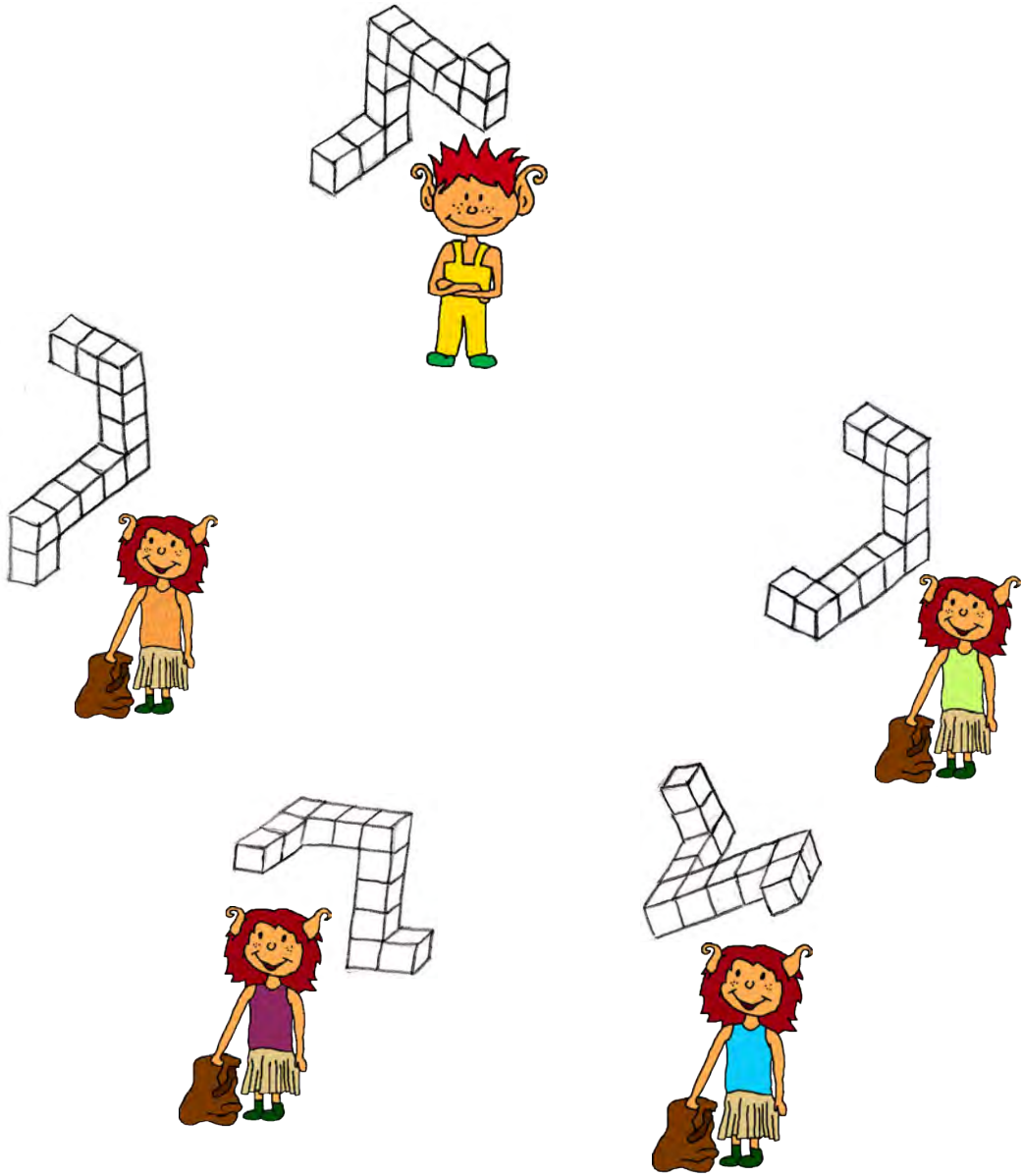


最后看到：_____

你能想到什么？

③ 小精灵弟弟制作了一个和姐姐相同的模型。

你能找出谁是他的姐姐吗？请连线。



说一说你选择她的理由吧！

④ 小木匠威廉制作了一个大木方块。他把所有面都涂成了蓝色。

请问，大木方块现在有多少面是蓝色的？

一个星期后，他又开始改造他的蓝色大木方块。

他把大木方块锯成了27个大小相同的小木方块。说一说，他是如何做到的？

威廉观察了一下这些小木方块。

他能找到多少块所有面都是蓝色的小木方块呢？ _____

他能找到多少块只有一面是蓝色的小木方块呢？ _____

他能找到多少块不止一面是蓝色的小木方块呢？ _____

解释一下你的答案！你也可以算一算，画一画或写一写。



① 将一张折叠的纸剪出一个形状，使其展开后在纸上得到一个圆形。

好好想一想，展开后就不能裁剪了哦。

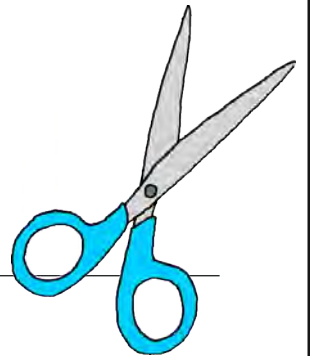
小提示！为了确保剪出一个圆形，我们需要注意什么？



② 将一张折叠的纸剪出一个形状，使其展开后在纸上得到一颗五角星。

好好想一想，展开后就不能裁剪了哟。

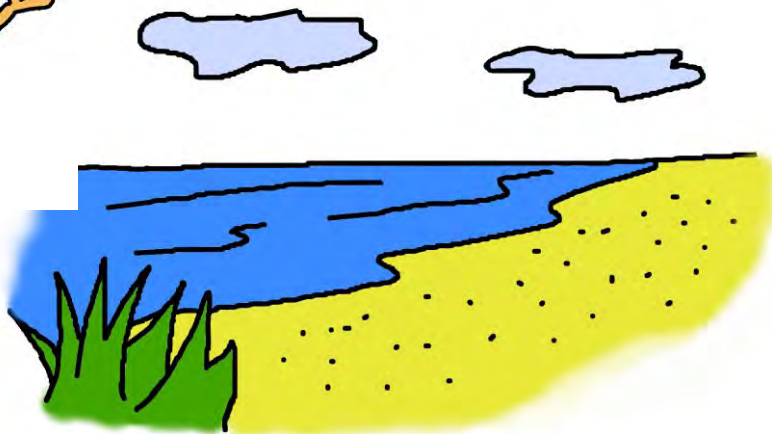
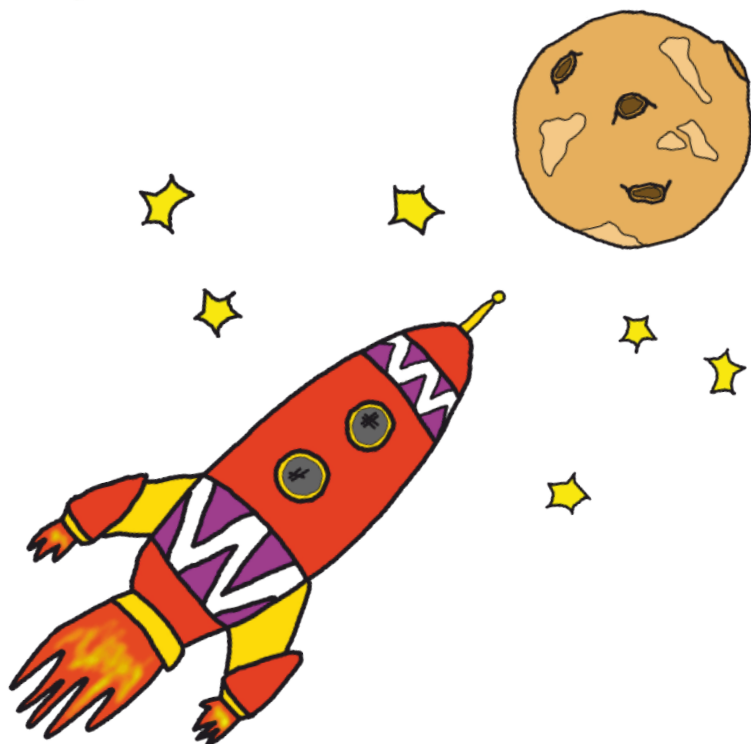
说一说，为了确保剪出一颗五角星，你是如何思考的。



姓名：_____

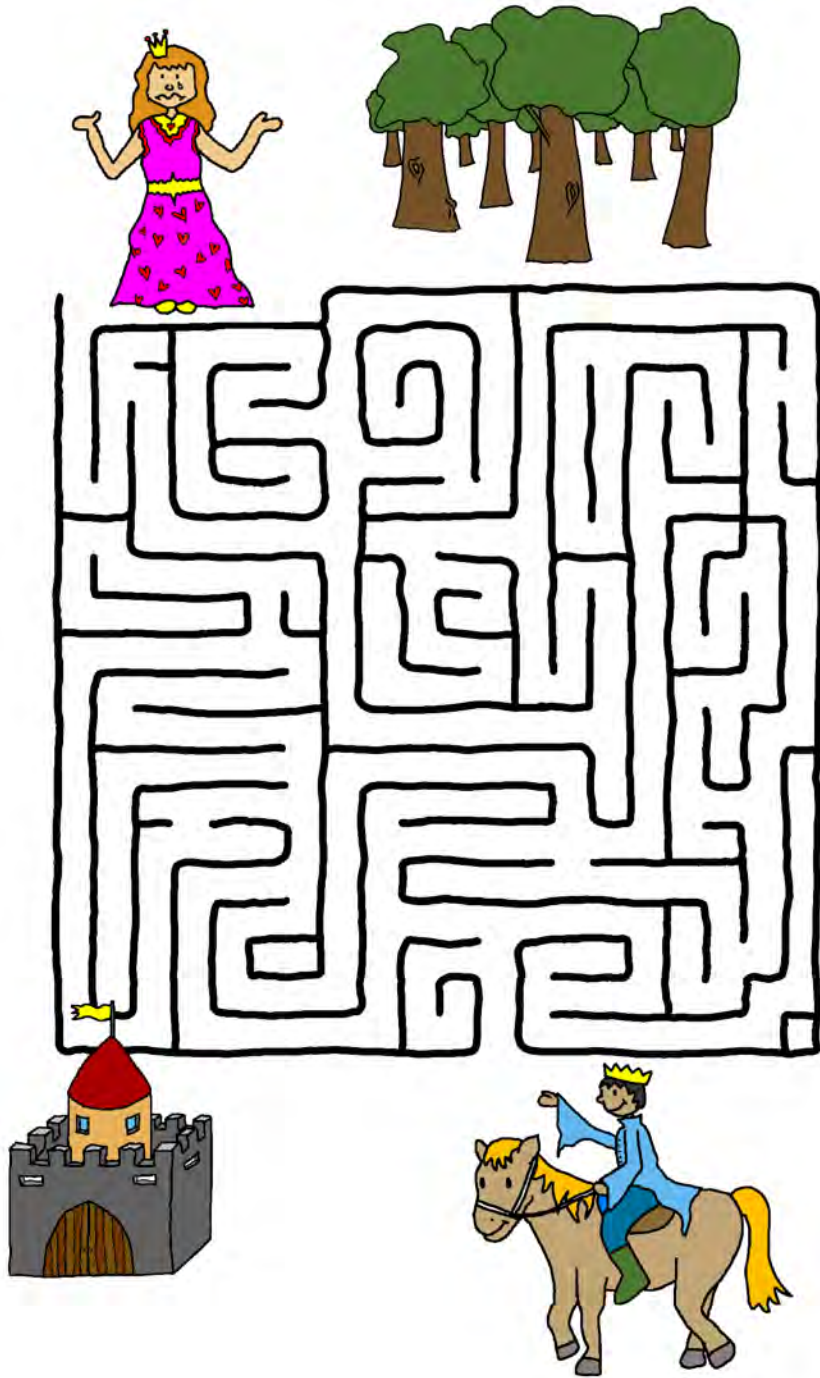
如果你还有更多的想法，写在空白页上吧！

7 圆满收官 迷宫以及更多探险



① 帮助王子找到公主！

画出一条通过迷宫的捷径。



说一说，为什么你找到的路线对于王子和公主来说是一条捷径呢？

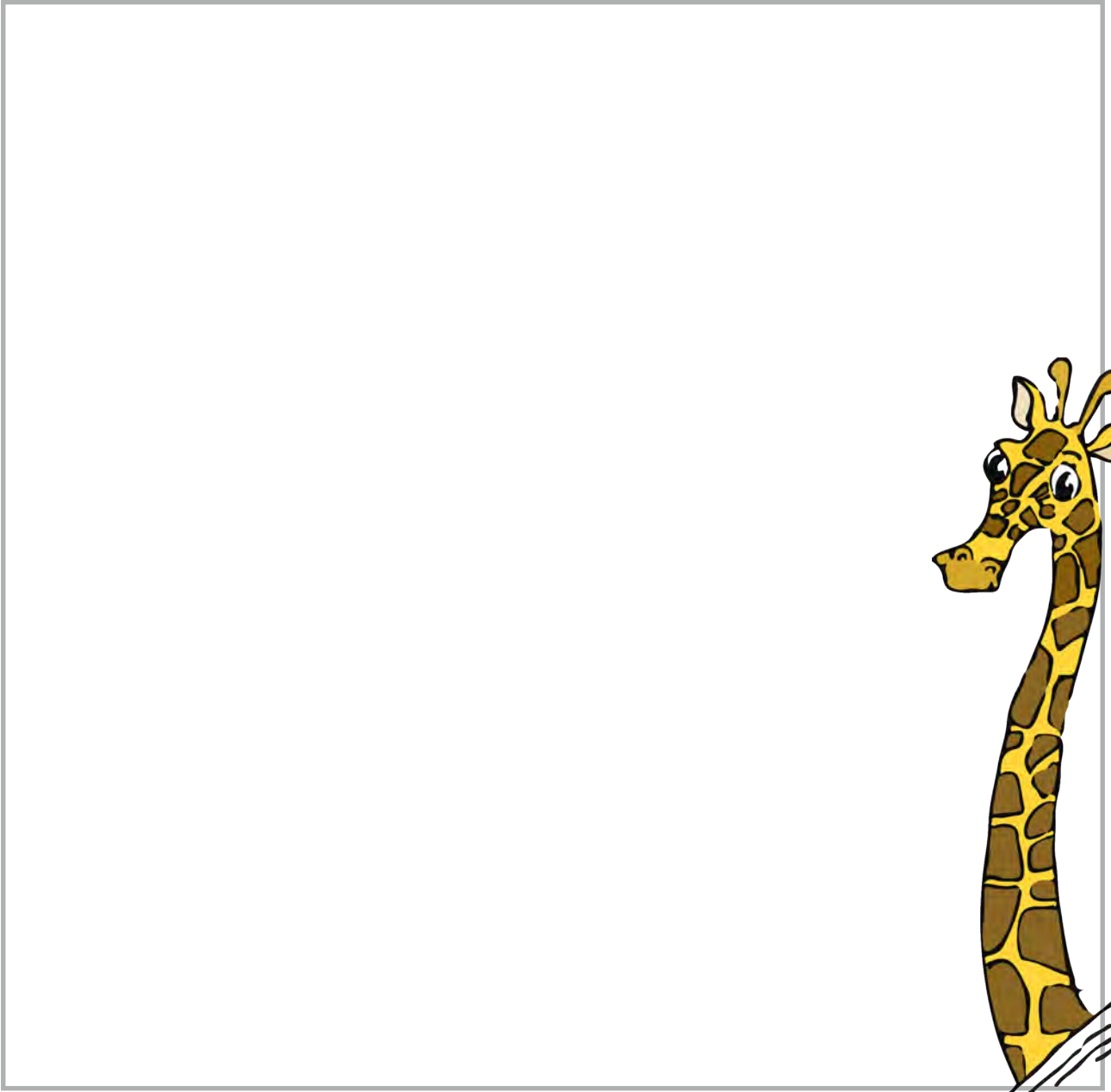
② 找到通往宝藏的路!



我们如何让迷宫变得更简单或者更复杂呢?

③ 想一想，现在你会做哪些非常难的题目了？

写下来，并解决它！



为什么这道题非常难呢？

姓名：_____

如果你还有更多的想法，写在空白页上吧！

三、展望

数学不是一项观赏性运动。
它不是知识的主体，也不是页面上的符号，
它是你玩的东西，是你做的事情。
——【美】基思·德夫林

在对表现特别出色的孩子使用的解题方法和策略的分析中一再表明，他们对数学理解的关键要素是成功地进行了逻辑推理，通过建立网络思想和探索数学关系来实现。

除了培养数学有天赋的孩子之外，我们还对数学思维的发展感兴趣，其中也包括对逻辑思维基本原则的调查。我们深入研究并采用了斯贝尔曼的一个具有决定性的重要题型——矩阵（斯贝尔曼，1904；哈文，1965），并强调了逻辑推理思维的两种中心形式。基础的思想是，根据一个人使用的潜在心理过程，他们在世界上的定位，他们的来源，收获的见解以及他们对世界观的个人建构可能是完全不同的。让我们从基础研究领域研究一个矩阵任务（图 C1）：右下角缺少一个图形，哪一个更适合呢？为什么？

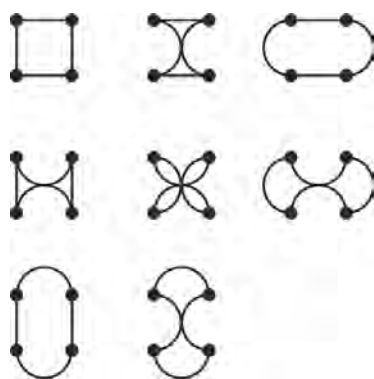


图 C1：作为谓词逻辑与功能逻辑的定性判断工具的示例。（施万克，1999-2000）

凭借认知过程可以建立图形之间的联系。重视图形中某些部分并忽略其他的成分，这样关注焦点的机制是我们广泛研究的两种认知方法的基础，它们被称作谓词逻辑思维和功能逻辑思维。（2003年：施万克）

谓词逻辑思维是逻辑推理思维中的一种类型，通过与之相同或者类似的共同思想构成相互联系。在例题中，每一排图形最上面和最下面的线一致，合起来就是一组图案。这样的方法也适合观察每一列图形：此处的侧线也都是相同的。根据图案的基本构造就形成了条理和框架，开发了图形的静态分类视图。在完成这种类型的认知总结时就能得出最终图形是由最后一排相同的上下线条以及最后一列相同的左右线条构成的。基于相同图案的规律性的认识在图 C2 中得到展现。

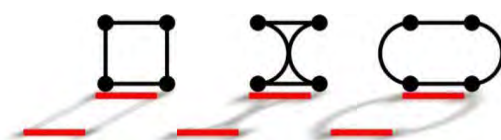


图 C2：凭借谓词逻辑思维来陈述观点：阴影部分呈现的对象带有特殊的着重符号。这三个图形的上下线条的一致性是被认可的。

功能逻辑思维也是逻辑推理思维中的一种类型，通过思考行为顺序，处理差异性来构成相互联系。在例题中，每一排侧线的差异就是由左右线条同时往内推接着往外拉的动作产生的，构成了相互联系。同样，每一列的上下线条也是有差异性的。由此，我们开发了图形的动态建模视图。在完成这种类型的认知总结时就能得出最终图形是一

个转型的产物：可选择将最后一列图形的上下线条或者最后一排图形的左右线条向外拉。基于图案差异性的认识在图 C3 中得到展现，也可以参考图 C4。



图 C3：凭借功能逻辑思维来陈述观点：阴影部分呈现的对象带有特殊的着重符号。认识到结构变化过程：图形转变为下一个是由左右线条先向里推，再向外拉形成的。

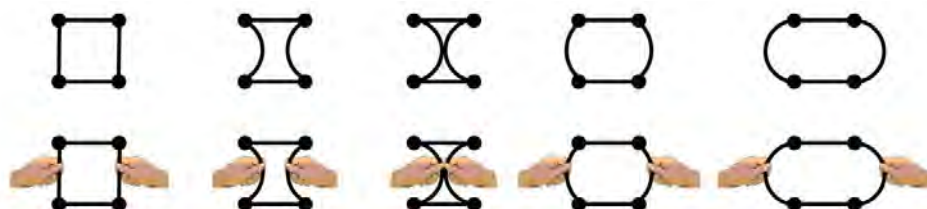


图 C4：可以使用操作视图来创建目标图形。手工操作对整个过程的启动和控制都是至关重要的，只有被动的观察是远远不够的。

与心理研究结果相比，我们的研究表明，男孩的功能逻辑思维能力比女生更强一些（参见施万克，2003；施万克 2013a, b）。关系到大多以算术内容为特征的数学初始教学，在逻辑推算中必须考虑到这一差异性。计算意味着要周密地处理数字。在计算过程中，数字会根据不同的计算类型而改变。而最终的目标是取得结果。那么由数字作为计算结果的理解就显得更容易了，这也是功能逻辑视图。

因此，引入对数字的理解技巧能使孩子们具有适当的算术经验，让他们能够体验以动作为基础的数字之间的相互联系。这就需要一堂强调功能逻辑关联学习与反思的数学课堂。为此，按照规则运转的游戏世界是有益的。教学材料必须从它存在的阴影中解脱出来，成为一

一个纯粹的支持性帮手，更加重视其作为一个游戏世界存在的意义——在这里能够通过自我实践解决数学问题，独立探索可能的解决途径，从而让自身的数学思想得到发展。若只是作为数学的片面固定形式——书写数学，则带着简化做法的危险，且只会留住表面的记忆。事实上，从过程角度来看，有必要深度了解数字和算术运算的功能（参见赫芬德·赫贝卡，2001；施万克&诺文斯卡，2008）。

我们的“数学早期教育”项目的主要目的就是开发这些数学的游戏世界，让能够实际应用、有功能性的数学思维在学习中得到重视。到目前为止，我们已经开发了如下的一些游戏世界（见下：网页链接）：

- **数学空间定位（ZARAO）**：为了让幼儿园的孩子们发现从零到四以及从零到九的数字空间。

- **数字剧院**：熟悉当今普遍记录数字所使用的符号，并为其书写做准备。

- **计算螺旋梯（RWT）**：探究从零到九和从十到十九的数字空间，从而更好地认识十进制的算术方法。

- **斯特拉会计系统**：通过十进制的角度认识从零到九百九十九的数字空间。（在想象中数字空间可以无限扩大，并不是仅仅以十作为基础，原则上两位数以上的数都是可能的，第二种观念在现代数字化的生活中是非常重要的）

- **数字大楼**：建立数字的倍增关系。（例如倍数、除数、质数、最大公约数、最小公倍数、平方数、二项式、平方差公式）

我们的研究重心就是为数学早期教育建立一个坚实的行动导向

基础，从而发展基于过程产生的数学理解力。从学前教育开始，**动态迷宫**就提供了一个有趣的基本概念设计的引入，对自动化和编程的数学信息理解有着至关重要的作用。（了解更多信息，详见以下网络链接）这在数字化时代也是意义非凡的。

参考文献

L. 赫芬德·赫贝卡（2001）：公式知识的知识形式。由 W. 万泽，B. 沃瑞编撰：对小学数学教学理论的贡献。西格贝特·施密特的纪念文章，83-89 页。汉堡：博士科瓦奇出版社

J. C. 瑞文（1965）：先进的高级矩阵，第一集与第二集。伦敦：路易斯出版社

斯贝尔曼（1904）：“普通智力”的客观测量与判定。美国心理学杂志，15 期，201-293 页

I. 施万克（2017）：数字冒险世界——计算螺旋梯的第一课，第四次修订版，小学生工作手册。奥斯纳布吕克：数学理论教学研究中心

I. 施万克（2013a）：小小的“一”创造的奇迹。小精灵数学奥林匹克

竞赛。小学，11期，16-19页

I. 施万克 (2013b): 思考的难点。由 M. 阿斯特和 J. H. 洛伦兹出版:
孩子的计算故障——神经科学、心理学、教育学 93-138. 第二次修
订版。哥廷根万登出版社

I. 施万克 (2010a): 数字冒险世界——为学前儿童准备的计算螺旋梯
小游戏。奥斯纳布吕克: 数学理论教学研究中心

I. 施万克 (2010b): 数字剧院——为书写准备的木制图形小游戏 (附
加数轴的运用)。奥斯纳布吕克: 数学理论教学研究中心

I. 施万克 (2003): 功能逻辑思维与谓词逻辑思维的引入。由 I. 施万
克编撰的认知数学。收录于数学理论教学 35(3), 70-78 页。

I. 施万克 (2001): 在解决功能问题与谓词问题时分析眼球的运动。
由 J. 诺沃特纳编辑: 欧洲数学教育研究第二册 489-498 页。布拉格:
查尔斯大学

I. 施万克 (1999-2000): 作为谓词逻辑与功能逻辑的定性判断工具。
A、B、C、D 集。奥斯纳布吕克: 数学理论教学研究中心

I. 施万克, E. 诺文斯卡 (2008): 公式思维的思维形式。由 B. 巴泽尔, T. 博林, A. 费斯出版: 代数思维。丽萨·赫芬德·赫贝卡的纪念出版册, 111-122 页。希尔德斯海姆: 弗朗茨贝克

网页链接

I. 施万克: 数学游戏世界。引用时间 2017 年 8 月 30 日:

<http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/mathe-magie/index.php/mathematische-spielwelten>

I. 施万克: 动态迷宫。引用时间 2017 年 8 月 28 日:

<http://www.mathedidaktik.uni-koeln.de/11642.html>

附录

证书（复印模板）

空白证书

铜奖证书

银奖证书

金奖证书

优秀教师证书

ZMO团队成员

因为他们的支持，ZMO已经成功举办了十三年。

ZMO孩子们参加小精灵头脑风暴的感言



在奥斯纳布吕克大学举行一年一度盛大的ZMO毕业典礼

灵学克赛
精学克赛
小数奥林匹克竞赛

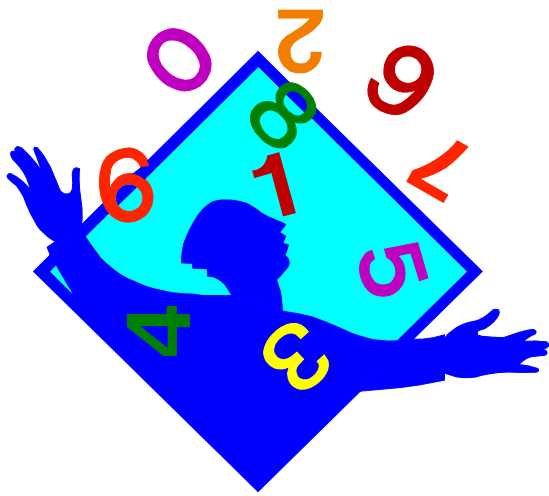


姓名

学校

班级





小 精 灵
数 学
奥 林 匹 克
竞 赛

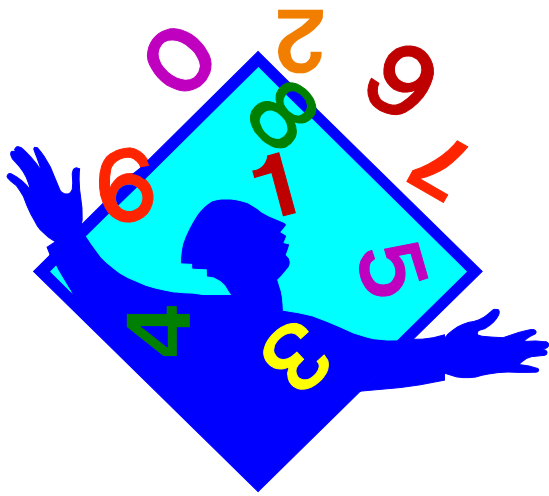
BRONZE

姓名

学校

班级





小 精 灵
数 学
奥 林 匹 克
竞 赛

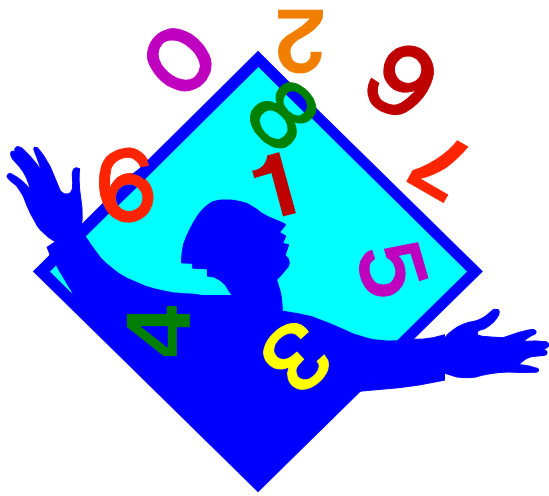
SILBER

姓名

学校

班级





灵学奥林匹克
小数竞赛

GOLD

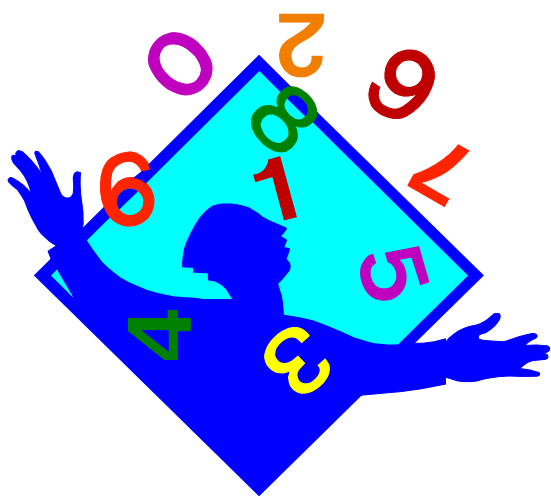
姓名

学校

班级



灵学竞赛 精品 小数奥林匹克 竞赛



学校

班级/先进小组

被评为“教学严谨与指导有方的优秀教师”是



ZMO团队成员名单

学术指导：英格·施万克 博士教授

ZMO13年来的贯彻落实要归功于许多人的大力支持，他们之中有的还是曾经参加过好几轮比赛的ZMO忠实粉丝。

大多数成员是来自小学数学教学专业的大学学生们，还有一些是大学的工作人员以及无私奉献的志愿者们。

在此向大家表示衷心的感谢！

注：此名单根据历史记录创建，不能保证其完整性。



小精灵数学奥林匹克竞赛

为奥斯纳布吕克市及周边地区小学三年级学生举办

安可·阿林	萨布丽娜·弗里林	丹尼斯·克拉菲
亚历山大·奥赫	维布可·弗里茨	维布可·克劳恩
克斯汀·巴特克	卡特琳·弗纳	安雅·科诺恩维菲
安可·贝克尔	马里恩·高里克	安妮·科勒
维丽娜·贝克曼	克里斯托弗·格克	朱迪思·库南
卡斯滕·比尔宁克	瑞吉娜·格拉赫	娜塔莎·科特
香塔尔·本内克	卡特琳娜·格莱斯	卡特琳·克拉西奇切克
卡特琳·布洛克斯多夫	伊娃·玛丽亚·格雷兹曼	比约恩·克伦普
卡蒂娅·波克	科琳娜·汉尼斯	玛吉特·克鲁兹哈克
米里亚姆·博尔默	多里特·赫克洛斯	珍妮·库萨维
英姆克·博尔茨	弗朗西斯卡·赫克洛斯	托马斯·科巴特
西娜·波特格	达娜·海因茨	玛丽亚·拉格
亚娜·布洛克	凡妮莎·赫尔墨斯	朱迪思·拉吉斯
比安卡·布鲁赫瓦尔德	玛丽安娜·赫兹伯格	伊娃·拉扎
丽莎·布鲁克尔	维布可·黑勒	尼尔斯·林尼曼
弗劳可·布朗斯	曼努埃拉·黑尔莫斯	约翰娜·洛曼
埃尔马·克罗斯·弗森堡 博士教授	布吉斯霍夫曼·祖霍恩	妮可·吕迪格
安娜·德彭	皮娅·霍斯特曼	加比·吕肯
卡琳娜·德特思	玛蒂娜·胡尔斯迈耶	莫妮卡·吕特克·德雷曼
朱莉娅·德特	提娅·伊斯雷尔	汤姆克·吕特尔
约翰尼斯·迪克	索尔维克·詹森	朱莉娅·卢克斯
妮可儿·迪克斯	赛宾娜·琼斯	萨布丽娜·马克
苏珊·德雷尔	艾米莉娅·尤宁	科琳娜·迈耶
维丽娜·杜伯特	安吉·卡尔维坎普	法比妮·马天尼
安妮卡·杜维尔	马瑞·卡明斯基	安娜勒纳·玛苏
克里斯汀·艾克塞勒	卡特琳娜·卡拉什	蕾蒙娜·凡妮莎·梅尔
	约克·艾瑞克·金纳	巴斯蒂安·梅滕斯

坦娅·迈耶

宾·穆勒

妮娜·穆勒

艾迪塔·诺温丝卡

卡特琳·佩琪

马伦·彼得曼

斯蒂芬妮·彼得森

卢茨·皮希特

斯蒂芬妮·普拉格曼

加布里尔·普利茨

梅兰妮·普罗帕

印卡玛丽亚·珀尔

马伦·珀特

托斯滕·普雷赤勒

弗兰克·彭萨克

弗朗西斯卡·科瓦德

比安卡·拉达茨

菲利普·瑞赫

凯伦·瑞什

伊娜·瑞克

科内娜·瑞佩

约格·里特布什

蒂娜·罗德

弗洛里安·罗尔斯

阿努什卡·鲁格

伊琳娜·卢克斯

佩特拉·桑德克

狄安娜·莎尔

克里斯蒂娜·沙佩尔

黛安娜·希姆

莫阿娜·希尔伯格

托马斯·辛科夫斯基

安妮多·施密特

约翰娜·施密特

卡特琳·莎纳勒

斯蒂芬·施耐德

玛瑞克·史诺尔

布瑞塔·舒马克斯

雅尼娜·史瑞德

伊丽莎白·施万克

朱莉娅·西宾

伊娜·施普林

安娜路易丝·斯特奥赫

克里斯汀·斯特奥坎普

卡特琳娜·塔普

安妮·特思琳

伊瑞娜·蒂曼

伊姆可·特雅登

纳丁妮·特瑞格

索菲娅·瓦霍特

安娜比安卡·维布洛克

朱莉娅·维舍

阿拉·弗拉森科

迪克·沃霍尔德

卡瑞娜·韦尔梅耶

安雅·温霍夫

科瑞娜·温德恩

桑娅·韦瑟尔

克里斯提娜·维彻斯

马伦·威斯

朱莉娅·温克勒

约瑟芬·温迪施

科尔斯滕·温克尔

英加·温克尔曼

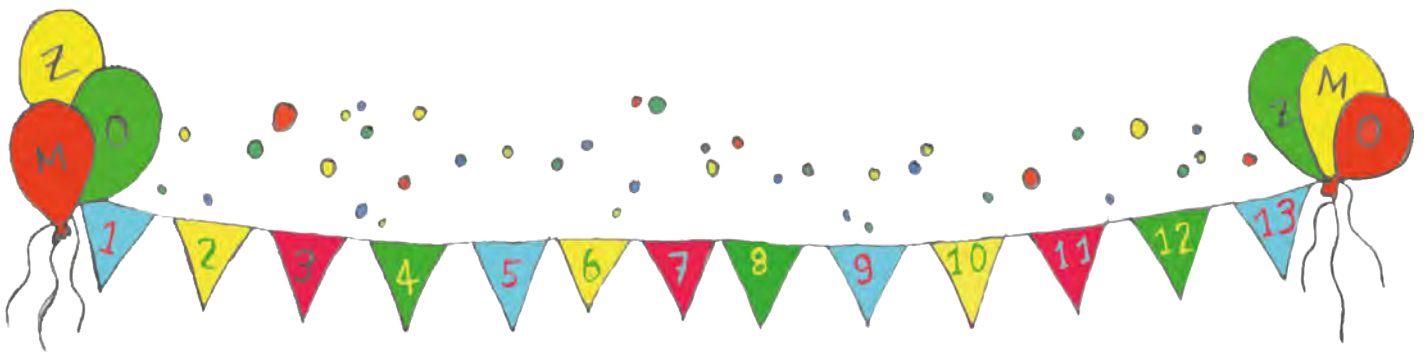
克里斯提娜·沃彻克

韦拉·沃特伦

菲利普·措多姆

珍妮娜·茨韦尔纳





来自ZMO孩子们的认可

我们也想加入小精灵头脑风暴的队伍中，因为.....

wir herausgefordert werden möchten.

我们想挑战自己。

Weil's Spaß macht!

因为这十分有趣!

ich Mathe sehr sehr gerne mag und ich werde alles geben. Ich war
sehr aufgeregt als ich ausgewählt wurde. Irgendwie war mir das
sehr wichtig. Das Gefühl kann ich nicht beschreiben. Ich bin
sehr glücklich.

我非常非常喜欢数学，而且我会竭尽所能。当我被选中的时候我非常激动。
不知怎么的这对我来说很重要。我无法描述那种感受。我太幸运了。

ich zeigen möchte was ich alles kann.

我想展示自己的能力。

wir ~~haben~~ schon so viel in Mathe gelernt
haben und wir dann bestimmt gute Chancen
haben zu gewinnen.

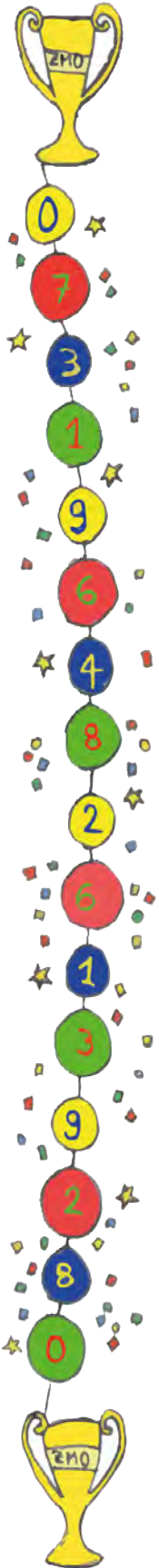
我们已经学了这么多数学了，想必我们胜利的机会相当大吧。

Weil wir Mathe gut finden. Weil wir gerne etwas
neues lernen wollen.

因为我们很喜欢数学。因为我们想学习新鲜的东西。

Damit wir unseren Kopf mal
richtig einschalten können.

我们可以适当地开发自己的大脑。



wir für die ganze Klasse mitmachen

我们整个班级都会参与进来。

Weil ich gerne Mathearbeiten mag. Ich möchte gerne testen wie gut ich wirklich bin.

因为我特别喜欢数学测试。我想测试一下自己究竟有多棒。

wir Schwierige Aufgaben mögen, gerne knabbeln und Spaß an Mathe haben.

我们喜欢困难的，令人费解的题目，这样的数学才充满乐趣。

es eben besonders ist.

es ist sehr schön das wir es dürfen.

有些题目是很特别的。我们能做这个是非常好的。

Weil ich Mathe liebe. Und wenn man dann auch noch Preise gewinnen kann ist das Super.

因为我很爱数学，而且能赢得奖品也不错。

... wir gerne unser Klasse gut vertreten möchten.

..... 我们想好好地代表我们的班级。

... es sicherlich viel Spaß machen wird, mit anderen Kindern zu rechnen.

..... 这会非常有趣，尤其是能够和其他的小朋友一起计算。

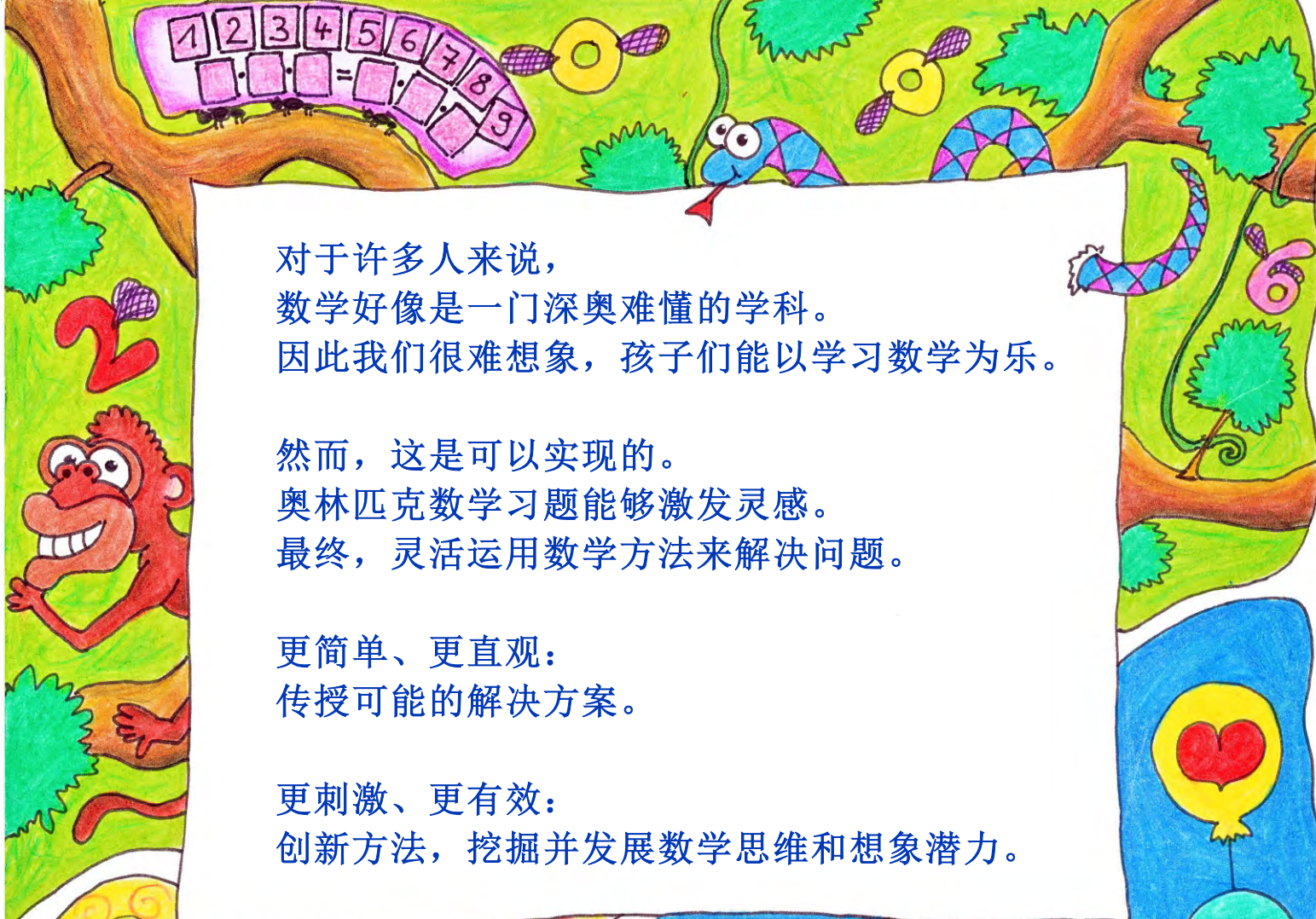
... es ein spannendes Erlebnis sein wird.

..... 这会是一段令人激动的经历。

wir Mathe mögen und in der Hirnspornrunde kann man mal so richtig den Kopf anwerfen.

我们喜欢数学，并且在小精灵头脑风暴里会打开我们的思维。





对于许多人来说，
数学好像是一门深奥难懂的学科。
因此我们很难想象，孩子们能以学习数学为乐。

然而，这是可以实现的。
奥林匹克数学习题能够激发灵感。
最终，灵活运用数学方法来解决问题。

更简单、更直观：
传授可能的解决方案。

更刺激、更有效：
创新方法，挖掘并发展数学思维和想象潜力。

