https://doi.org/10.37626/GA9783959871723.0.07

HERAUSFORDERNDE AUFGABEN – 13 JAHRE ZWERGEN-MATHEMATIK-OLYMPIADE

Inge Schwank

Universität zu Köln

Unredigierte Manuskriptfassung des Artikels Schwank, I. (2020). Herausfordernde Aufgaben – 13 Jahre Zwergen-Mathematik-Olympiade. In: L. Baumanns, J. Dick, A.-C. Söhling, N. Sturm & B. Rott (Hrsg.), Wat jitt dat, wenn et fädich es? Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen in Köln 2019. Münster: WTM) (S. 107–120).

*Die Zwergen-Mathematik-Olympiade [ZMO] ist über 13 Jahre hinweg mit insgesamt 2102 Drittklässler*innen (~49,43% Mädchen) im Rahmen von universitären Seminaren zur Mathematischen Begabung durchgeführt worden. Der nahezu erreichten Geschlechterparität liegt die Vorgabe zugrunde, dass pro teilnehmender Klasse ein Mädchen sowie ein Junge als deren Mathematikvertretung zur ZMO entsandt werden können. Die in ihren Schwierigkeitsgraden unterschiedlich herausfordernden Aufgaben entfallen auf 7 Rubriken: R1 einfache arithmetische Einstiegsaufgaben, R2 & R3 anspruchsvollere Aufgaben zu arithmetischen Fähigkeiten, R4 kombinatorisch lösbare Aufgaben, R5 Textaufgaben, R6 Aufgaben zu Mustern und geometrischen Figuren, R7 Ausstiegsaufgaben. Die Seminarleistung liegt, basierend auf Recherchen und Diskussionen zu einschlägiger Literatur, in der Erarbeitung von Aufgabensätzen und der Auswertung mit abschließender Bepunktung der Aufgabenbearbeitungen. In Übereinstimmung mit bekannten Befunden zeigt sich eine Tendenz, dass die teilnehmenden Jungen insbesondere in der Leistungsspitze den teilnehmenden Mädchen (etwas) überlegen sind. Über eine Analyse der Aufgaben und deren Bearbeitungen hinaus ist eine Schlüsselfrage für die Zukunft, welche kognitiven Fähigkeiten Einflussfaktoren für erfolgreiches mathematisches Problemlösen sind, um diese dann gezielt im Mathematikunterricht adressieren zu können. Bislang gibt es dazu erst magere Ansätze.*

ZMO: ZWERGEN-MATHEMATIK-OLYMPIADE

In Stadt und Landkreis Osnabrück wurde mit der ZMO 13 Jahre lang eine Mathematikolympiade für Drittklässer*innen durchgeführt und zwar im Rahmen von Seminaren zur mathematischen Begabung vornehmlich mit Studierenden im Lehramt Grundschule. Um Mädchen gleichermaßen wie Jungen zu erreichen und viele der insgesamt gut 100 Grundschulen der Region zu beteiligen, wurde als Wettbewerbsbedingung festgelegt, dass pro teilnehmender Klasse ein Mädchen und ein Junge als deren Mathevertretung entsandt werden konnten. Im Klassenverband war eine Mathematik-Kreativarbeit einzureichen, die passend zum Thema des jeweiligen Durchgangs (z.B. Märchen, Weltall, Sport, Mittelalter, Unterwasserwelten) in vielerlei Weise ausgestaltbar war, darunter Bastelarbeiten, Bücher, Spiele und Theaterstücke. Alle Kreativbeträge wurden digital aufbereitet und der Allgemeinheit im Internet dargeboten. Die besten Beiträge wurden prämiert und Kinder und Lehrkräfte zu einer Prämierungsfeier an die Universität Osnabrück eingeladen. Die Mathevertretungen der Klassen trafen sich in etwa 20er-Gruppen an einem Samstagvormittag im 2. Schulhalbjahr zunächst an der die Mathematikolympiade jeweils ausrichtenden Grundschule, später – aufgrund der hohen Teilnehmer*-innenzahlen – an der Universität Osnabrück, um, betreut durch die Studierenden, eigens erstellte Mathematikaufgaben zu bearbeiten. War zunächst Überzeugungsarbeit zu leisten, dass Mädchen wie Jungen gleichermaßen fähig sind, an einer Mathematikolympiade teilzunehmen – statt eines Mädchen und eines Jungen empfahlen Lehrkräfte aus ihren Klassen zwei Jungen oder einen einzigen Jungen – so waren auf Dauer dazu keine Diskussionen mehr notwendig. Insgesamt haben über die Jahre hinweg 1039 Mädchen und 1063 Jungen teilgenommen, also in Summe N=2102 Drittklässler*innen (~ 49,43% Mädchen). Alle Kinder erhielten für ihre Leistungen bei der Bearbeitung der Mathematikaufgaben eine Urkunde und zwar mit aufsteigender Punktzahl gestaffelt nach Bronze (~40% der Kinder), Silber (~40% der Kinder), Gold (~20% der Kinder). Als Ausweis besonderen Erfolgs gab es die Diamant-Kategorie für die Plätze 3, 2, 1 bei den Mädchen wie auch bei den Jungen, wobei das erstplatzierte Mädchen wie der erstplatzierte Junge zusätzlich zur Diamant-Urkunde während der großen Abschlussfeier mit Lehrkräften und Familienangehörigen einen der beiden ZMO-Wanderpokale überreicht bekamen.

Je zwei Teammitglieder korrigierten und bepunkteten die Bearbeitungen einer Aufgabe auf Grundlage einer im Team festgelegten Punkteverteilung. Die Aufgabenbearbeitungen derjenigen Mädchen und Jungen, die mit ihren Punkten unter den obersten 30% der erreichten Punkte lagen, wurden von einem Experten-Team bestehend aus wissenschaftlichen MitarbeiterInnen, erfahrenen Studierenden und der wissenschaftlichen Leitung der ZMO ein weiteres Mal intensiv gesichtet und diskutiert, bis die Punkte-Vergabe endgültig fest stand.
Die jeweils höchste Punktzahl in den 13 Jahren erzielten 10 Jungen und 3 Mädchen; auch in die Goldgruppe schafften es insgesamt weniger Mädchen als Jungen. In der Diamantgruppe lagen die erzielten Punkte der Mädchen im Schnitt bei rund 92,5 % derjenigen der Jungen, bei den oberen 20% im analogen Vergleich bei 93,6%. Bei der gesellschaftlichen Fokussierung auf und Neigung zur Bewunderung der Allerbesten ist hier sicher noch Aufklärungsarbeit und eine umfassendere Ergründung der Ursachen notwendig. Möglicherweise ist die Reihung von Plätzen zu überdenken, die größere Unterschiede suggeriert als es den damit verbundenen Leistungsunterschieden (gemessen in Punktunterschieden) entspricht.

Rubrik	Jungen-P-MW	Mädchen-P-MW	%-Anteil Mädchen-P-MW
R1	29,08	29,26	100,60
R2	25,32	21,24	83,88
R3	23,34	22,28	95,47
R4	19,27	20,84	108,15
R5	24,27	20,68	85,21
R6	18,52	18,62	100,54
R7	17,38	17,84	102,62

Tabelle 1. Bilanz aus 13 Jahren: Punkt-Mittelwerte [P-MW] nach Geschlecht in den Rubriken R1-R7 und jeweiliger prozentualer Anteil der Mädchen-P-MW.

Tabelle 1 gibt einen ersten Eindruck vom unterschiedlichen Abschneiden der Jungen und Mädchen in den sieben unterschiedlichen Aufgaben-Rubriken. R1 sind einfache arithmetische Einstiegsaufgaben, R2 & R3 anspruchsvollere Aufgaben zu arithmetischen Fähigkeiten, R4 kombinatorisch lösbare Aufgaben, R5 Textaufgaben, R6 Aufgaben zu Mustern und geometrischen Figuren, R7 Ausstiegsaufgaben. Beispiele werden im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt.

Statistische Auswertungen mittels SPSS erhärten die Unterschiede hinsichtlich der Rubriken 2, 4 und 5. Im Folgenden sind die Ergebnisse angegeben hinsichtlich:

- *V-MJ*: Vergleich alle Mädchen & Jungen über alle Rubriken und alle Jahre
- *V-MJ-20*: Vergleich jeweils beste 20% über alle Rubriken und alle Jahre
- *V-MJ-R*: Vergleich alle Mädchen und Jungen zu Rubriken über alle Jahre
- *V-MJ-R-20*: Vergleich jeweils beste 20% zu Rubriken über alle Jahre

Eine Prüfung gemäß des Kolmogorov-Smirnov- und des Shapiro-Wilk-Tests ergab, dass die individuellen Punktzahlen pro Aufgabe (1-10) sowie die individuellen Gesamtpunktzahlen nicht normalverteilt sind (jeweils $p < .001$ für alle Variablen). Insofern wurden zu o.g. Vergleichen Mann-Whitney-U-Tests berechnet.

- *V-MJ*: Bezüglich der Gesamtpunkzahl zeigte sich kein signifikanter Unterschied zwischen Mädchen und Jungen in der Gesamtstichprobe ($p = .171$, $M_{Mädchen} = 32{,}88$, $SD = 11{,}41$, $M_{Jungen} = 33{,}85$, $SD = 12{,}43$). Bemerkenswert ist der große SD-Wert.
- *V-MJ-20*: Hingegen konnte für die besten 20% ein signifikanter Unterschied nachgewiesen werden ($p < .001$, $M_{Mädchen} = 49{,}80$, $SD = 5{,}89$, $M_{Jungen} = 52{,}80$, $SD = 5{,}61$).
- *V-MJ-R:* Signifikante Unterschiede zeigen sich in den Rubriken 2, 4 und 5 (Rubrik 2: $p < .001$, $M_{Mädchen} = 2{,}77$, $SD = 2{,}63$, $M_{Jungen} = 3{,}22$, $SD = 2{,}77$, Rubrik 4: $p < .05$, $M_{Mädchen} = 3{,}73$, $SD = 1{,}85$, $M_{Jungen} = 3{,}49$, $SD = 2{,}05$, Rubrik 5: $p < .05$, $M_{Mädchen} = 1{,}99$, $SD = 2{,}24$, $M_{Jungen} = 2{,}56$, $SD = 2{,}13$).
- *V-MJ-R-20:* Signifikante Unterschiede zeigen sich in Rubrik 5 ($p < .05$, $M_{Mädchen} = 4{,}65$, $SD = 2{,}24$, $M_{Jungen} = 5{,}15$, $SD = 2{,}11$). Das Herausstechen dieser Rubrik 5, den Textaufgaben, ist auffällig.

Die Ergebnisse lösten frühzeitig Diskussionen aus. Mädchen können Jungen in Mathematik überlegen sein wie auch anders herum, aber die Verhältnisse sind nicht ausgewogen. Dies stellt für den Mathematikunterricht der Grundschule eine Herausforderung dar: Wie kann es noch besser gelingen, Kinder, insbesondere auch Mädchen, in der Entwicklung ihres mathematischen Denkens, speziell ihres arithmetischen Denkens zu fördern? Dabei ist hier mit der Fähigkeit zum Denken gemeint, eigenständig auf eine Idee kommen und nicht nur, Erlerntes anwenden zu können. Beeinträchtigungen erschweren Problemlöseversuche. .

Angesichts der Ergebnisse wurde fortwährend reflektiert, wie möglicherweise der Unterschied im Abschneiden der Mädchen und Jungen gezielt verringert werden könnte, indem die zum Einsatz zur Debatte stehenden Aufgaben und die damit abgedeckten Themenbereiche eingehend analysiert wurden. Wertvolle Beiträge dazu sind insbesondere Elmar Cohors-Fresenborg, Johann Sjuts und Lisa Hefendehl-Hebeker zu verdanken. Letztendlich konnten wir noch keine tragfähige Lösung erarbeiten und umsetzen. Wir sind aber überzeugt, dass es sinnvoll ist, Kinder expliziter in ihrem funktional-logischen Denken zu stärken (näheres dazu siehe Abschnitt ‚Ausblick'). Arithmetik ist der Kernbestandteil des Mathematikunterrichts der Grundschule und so wundert es nicht, dass viele der ZMO-Aufgaben, darunter auch Textaufgaben, arithmetisches Denken einfordern. Zum Erschließen und Bewältigen arithmetischer Zusammenhänge gehört eine gute Zahlraumorientierung, die auf den rechnerischen Zusammenhängen zwischen Zahlen basiert. In der mathematischen Grundlagenforschung und Philosophie ist herausgearbeitet, dass die Grundlage der natürlichen Zahlen die Nachfolgerbildung ist und damit ein zentraler Aspekt der Zahlen ihre Konstruktionsgeschichte bildet (s. z.B. Cassirer, 1910, Dedekind, 1969/1887, Frege, 1977/1884, Gowers, 2002, Natorp, 1910, Meschkowski, 1969). Hinzu kommt die Entwicklung eines Verständnisses für die dezimale Zahlschrift. Noch gibt es kaum ein Material, anhand dessen ein nahtloser, direkter Übergang von der Handlung mit diesem zur formalen dezimalen Zahlschreibweise vollzogen werden kann, so dass arithmetisches Denken besonderes gefordert ist (siehe aber Gallin 2012, Schwank 2013). Das Wesen des Aufbaus der natürlichen Zahlen (Peano-Dedekind-Axiome) in Kombination mit ihrer Notation mittels der dezimalen Zahlschrift bilden die Grundlagen der Arithmetik. In beiden Fällen spielen Konstruktionsprozesse die zentrale Rolle, für ein tragfähiges arithmetisches Verständnis gilt es diese kognitiv zu meistern.

Insgesamt steht in der Grundschule noch wenig mathematischer Formalismus zur Verfügung, so dass ein strukturell-inhaltliches Denken auf Basis enaktiver und ikonischer Repräsentationsformen im Sinne von Bruner (1973/1964) bedeutsam ist, hinzu kommt die verbal-begriffliche Erläuterung am repräsentativen Beispiel im Sinne von Hefendehl-Hebeker (2001), woraus eine Propädeutik für die elementare Algebra erwächst und somit ein Bindeglied zwischen Arithmetik und Algebra gegeben ist. Grundschulmathematikunterricht dient damit als essentielle Grundlage für die Entwicklung des weiterführenden mathematischen Denkens. Auch um Spuren eines angebahnten algebraischen Denkens besser sichtbar zu machen, enthalten viele der ZMO-Aufgaben explizit einen Begründungsanteil.

AUFGABENÜBERSICHT NACH RUBRIKEN

Die verwendeten Aufgaben sind zusammen gestellt in Schwank (2014). Inspiriert wurden sie durch Aufgabenmaterial aus Schulbüchern für den Mathematikunterricht der Jahrgangsstufen 3-5 wie auch einschlägige Werke, z.B. Mathe für kleine Asse (Käpnick, 2001) oder Math Olympiad Contest Problems for Elementary and Middle Schools (Lenchner, 1997). Die ZMO-Aufgaben fallen in sieben unterschiedliche Rubriken. Die Ausgestaltung orientierte sich am jeweiligen Rahmenthema für die Mathematik-Kreativbeiträge. Den Kindern sollte immer ein guter Einstieg in die Mathematikolympiade eröffnet werden, dazu wurde zunächst mit den Kindern gemeinsam eine Aufgabe erarbeitet, die ersten Aufgaben waren als Rechenaufgaben gut machbar, die beiden herausforderndsten Aufgaben waren gut verteilt und die letzte Aufgabe war ein netter Abschluss wie z.B., einen Weg in einem Labyrinth zu finden.

Rubrik 1: Aufmerksames Rechnen

Diese Rubrik umfasst Aufgaben zur Addition und Subtraktion, dabei den Umgang mit Fehlern, Rechenstrategien und Rechnen mit noch unbekannten Zahlen. Ein Beispiel ist die Auseinandersetzung mit der vorgegebenen Berechnung 287+423=600, die in Schwank (2013) besprochen worden ist. Nur einige Jungen waren dadurch aufgefallen, dass sie eine Orientierung im Zahlenraum zeigten, indem sie erkannten – statt einfach loszurechnen und anhand des selbst ermittelten Ergebnisses das vorgelegte Ergebnis zu beurteilen: mit 200+400 wird 600 bereits erreicht, daher kann das Ergebnis nicht stimmen.

Ein weiteres Beispiel zeigt Abbildung 1. Es handelt sich um eine Einstiegsaufgabe, bei der es um die schlaue Berechnung der Summe von 127 und 398 geht. Im Schnitt erreichten sowohl Mädchen als auch Jungen 3,4 Punkte. Zum Einsatz kommt hier die Berechnungsmethode des schriftlichen Addierens, die die Kinder im Verlauf der 3. Jahrgangsstufe erlernen.

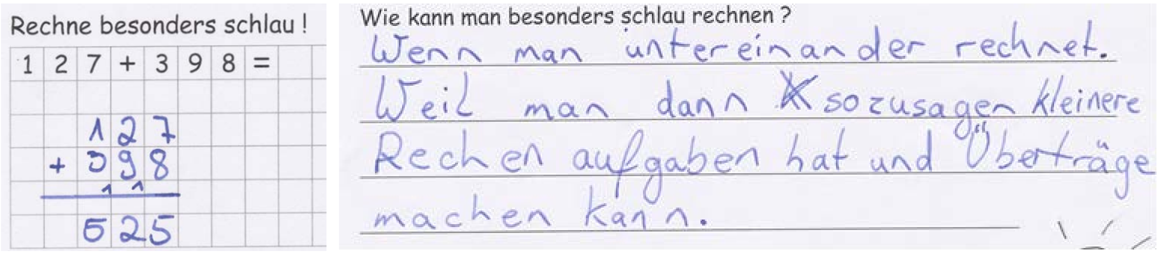


Abbildung 1. Beispiel der Bearbeitung einer Einstiegsaufgabe in die Mathematik-Olympiade aus Rubrik 1.

Rubrik 2: Zahlen- und Rechenoperationsrätsel

Diese Rubrik umfasst Aufgaben, bei denen fehlende Zahlen oder Rechenoperationen herauszufinden sind wie auch Rechenaufgaben, die mit Streichhölzern gelegt werden und das Erkennen von Zahlenmustern. Die Aufgabe, welche natürlichen Zahlen die Gleichung □ - ◇=2 erfüllen, ist besprochen in Schwank & Nowinska (2008). Wie gelingt es Kindern dabei, die unendlich vielen möglichen Zahlenpaare in den Blick zu nehmen und argumentativ einzufangen? Wieder fällt dabei das Zurechtfinden einiger Jungen im Zahlenraum auf. Werden von den Kindern teils nur konkrete Zahlenbeispiele benannt, schreibt ein Junge z.B.: „Susi könnte: 3-1=2, 4-2=2 und bis ▯ - fast ▯ = 2 machen.“ oder ein anderer (in Verallgemeinerung der Aufgabenstellung): „Die Zahlen müssen immer so viel wie das Ergebnis auseinander sein.“. Angebahntes algebraisches Denken ist offenkundig.

Die Bearbeitung einer Aufgabe, die für einen der vordersten Plätze entscheidend war, zeigt Abbildung 2. Die drei erstplatzierten Mädchen erreichten insgesamt 3 Punkte (1,5; 1,5; 0), die drei erstplatzierten Jungen 16 Punkte (5; 5,5; 5,5). Insgesamt lag der Punkteschnitt aller 71 Mädchen bei 0,27, der aller 72 Jungen bei 0,73. Die fehlenden Punkte an der Maximalpunktzahl von 6 Punkten liegen daran, dass die Aufgabe zwar von 6 Jungen (keinem Mädchen) komplett richtig bearbeitet werden konnte, aber keiner von ihnen dazu eine vollständige Begründung ausformuliert hat.

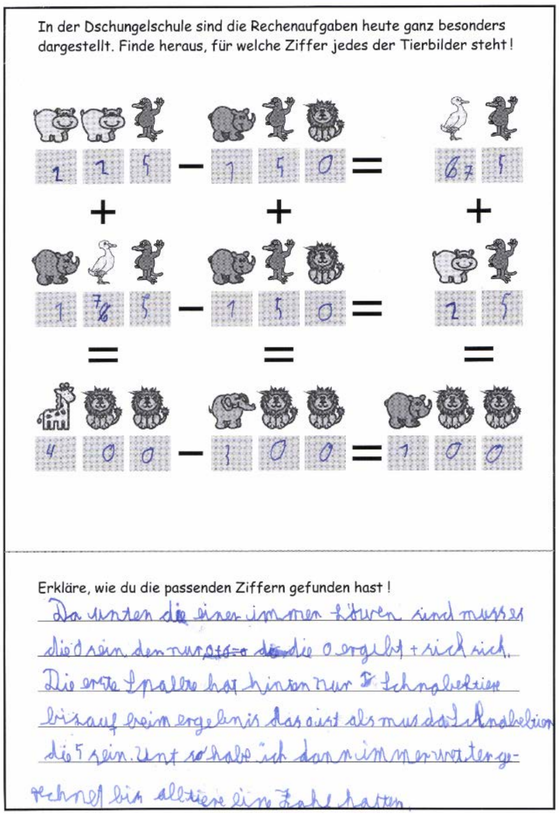


Abbildung 2. Beispiel der erfolgreichen Bearbeitung einer herausfordernden Aufgabe aus Rubrik 2. Leitidee ist die Erreichbarkeit von Zahlen.

Rubrik 3: Arithmetische Gesetzmäßigkeiten

Diese Rubrik umfasst Aufgaben zum Fortführen von Zahlenreihen wie auch Additions- und Multiplikationsaufgaben mit besonderen Eigenschaften. Bei einer Folge der Reihenfortsetzungen 4, 6, 9, 13, 18, … 4, 6, 10, 18, 34, … 3, 6, 5, 10, 9, … erreichten die Mädchen im Schnitt einen halben Punkt weniger als die Jungen (darunter von den 105 Mädchen: 10,48% volle Punktzahl, 4,76% null Punkte; von den 115 Jungen: 14,78% volle Punktzahl, 1,74% null Punkte).

Eine weitere Beispielaufgabe zeigt Abbildung 3. Insgesamt erzielten die Mädchen im Schnitt 2,68, die Jungen 2,90 Punkte. Rechenaufgaben sind hier zueinander in Bezug zu setzen. Möglich wäre, zu erkennen, dass die Ergebnisse zur 3er-Einmaleinsreihe gehören. Die Frage ist, ob dies im Fall der gegebenen gemeinsamen Struktur der Rechenaufgaben immer gilt oder auch, wie sich die additive Berechnung zu einer andersartigen Berechnung umdeuten lässt. In der abgebildeten Bearbeitung konzentriert sich der Junge auf die Vorgehensweise bei der Berechnung und gibt als Beispiel an, dass statt 2+3+4 zu rechnen auch die Berechnung 3·3 möglich ist, und zwar dadurch, dass von der 4 einer an die 2 gegeben wird. Es fehlt ihm noch die Ausdrucksweise dafür, diese konkrete Aufgabe als repräsentatives Beispiel für die

Allgemeingültigkeit des Zusammenhangs zu nehmen. Dafür versucht er im letzten Aufgabenteil, die Aufgabenstellung zu verallgemeinern: Hat eine solche Zahlenfolge eine mittlere Zahl, so können die Zahlen alle auf diese mittlere Zahl ausgeglichen werden und es stellt sich eine Multiplikationsaufgabe heraus. Er konkretisiert dies nicht näher, aber die Angabe 5·7 kann interpretiert werden als entstanden aus 5+6+**7**+8+9 oder 2+3+4+**5**+6+7+8.

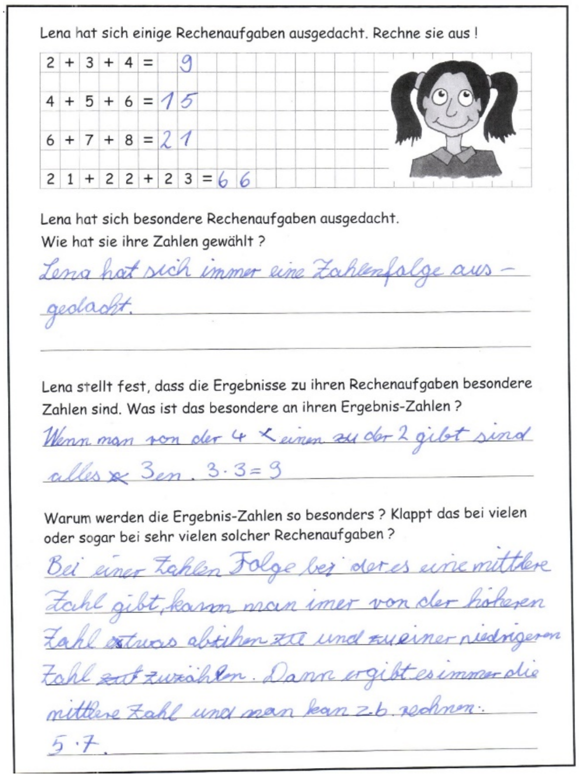


Abbildung 3. Beispiel der erfolgreichen Bearbeitung einer Aufgabe aus Rubrik 3.

Rubrik 4: Möglichkeiten meistern

Diese Rubrik umfasst kombinatorische Aufgaben, so gilt es zutreffende Anordnungen zu finden, nach verschiedenen Möglichkeiten zu suchen oder auch alle Möglichkeiten herauszufinden.

Eine Bearbeitung eines Aufgabenbeispiels zeigt Abbildung 2. Auffällig ist die ikonische Ausgestaltung der in einen kombinatorischen Zusammenhang zu bringenden Objekte. Der Aufgabentext gibt nur für die Hosen explizit den charakteristischen Unterschied an (rot, blau, gelb), der für die Pullis und Zipfelmützen wird phantasievoll entworfen, so z.B. für die Pullis: rot-quergestreift, blau-gepunktet, grün-gewellt, gelb-diagonalgestreift. Mit im Schnitt 1,82 Punkten erzielten die Mädchen etwas mehr Punkte wie die Jungen, deren Schnitt bei 1,73 Punkten liegt (darunter von 88 Mädchen 0% volle Punktzahl, 11,36% null Punkte, von den 94 Jungen 2,13% volle Punktzahl, 17,02% null Punkte). Punkteverluste resultierten aus falschen Ansätzen oder auch vergleichsweise unzureichenden Begründungen oder Klarheit in der Darstellung.

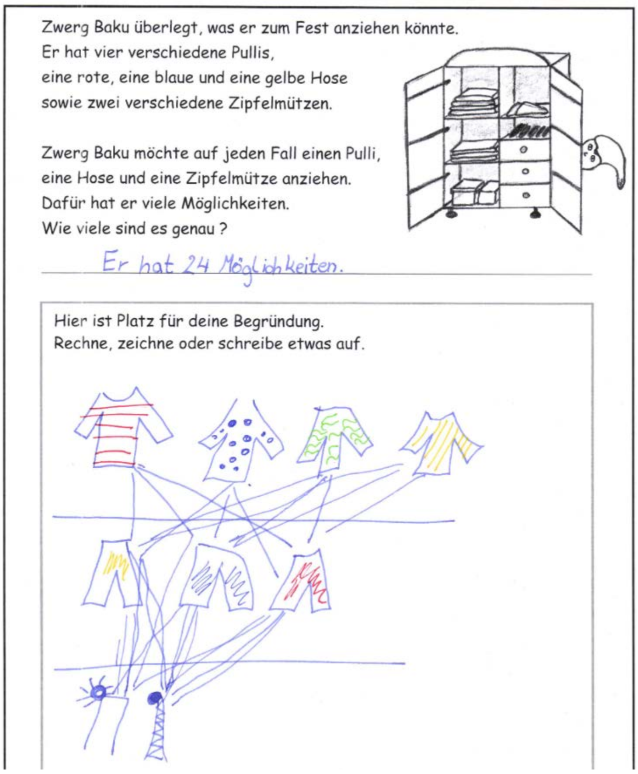


Abbildung 4. Beispiel der erfolgreichen Bearbeitung einer Aufgabe aus Rubrik 4.

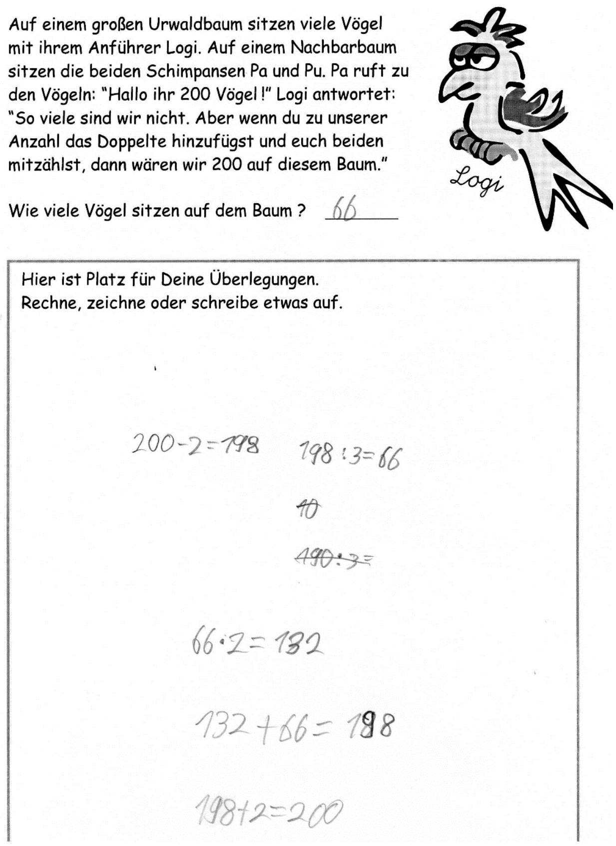
Rubrik 5: Textaufgaben

Diese Rubrik umfasst Aufgaben, bei denen es gilt, eine, zwei oder auch noch mehr unbekannte Größen herauszufinden, es geht um Flächen, Wege und Entfernungen, weiter um das Überblicken zeitlich verwobener Zusammenhänge, dabei Situationen mit der Charakteristik ‚Je mehr, desto mehr' oder ‚Je mehr, desto noch viel mehr' und schließlich um multiplikative Zusammenhänge und Erkunden von Wenn-dann-Verhältnissen.

Abbildung 5 zeigt die Bearbeitung einer dieser Aufgaben, deren Bearbeitung mit entscheidend war für das Erreichen einer der vordersten Plätze. Bemerkenswert ist, dass das Rückwärtsrechnen zur Bestimmung der Anzahl der Vögel gelingt und die Berechnung kontrolliert wird, dies sowohl bei einzelnen Rechenschritten (Ergebnisse werden korrigiert) als auch hinsichtlich des Gesamtkonzepts (Vorwärtsrechnen als Probe). Keines der 70 Mädchen kam mit dieser Aufgabe zurecht, sie erhielten alle null Punkte. Die 72 Jungen erhielten im Schnitt 0,31 Punkte (darunter 4,2% annähernd volle Punktzahl, 93% null Punkte).

Rubrik 6: Figürliche Muster

In dieser Rubrik geht es um das Erkennen und Fortsetzen von Mustern, die Untersuchung von Mustern, die Anzahl von Quadraten und Rechtecken, Flächenbestimmung, maßstäbliches Vergrößern, räumliches Vorstellen und schließlich um Figuren, die aus einem gefalteten Papierstück ausgeschnitten werden sollen.



Auf einem großen Urwaldbaum sitzen viele Vögel mit ihrem Anführer Logi. Auf einem Nachbarbaum sitzen die beiden Schimpansen Pa und Pu. Pa ruft zu den Vögeln: "Hallo ihr 200 Vögel!" Logi antwortet: "So viele sind wir nicht. Aber wenn du zu unserer Anzahl das Doppelte hinzufügst und euch beiden mitzählst, dann wären wir 200 auf diesem Baum."

Wie viele Vögel sitzen auf dem Baum? 66

Hier ist Platz für Deine Überlegungen.
Rechne, zeichne oder schreibe etwas auf.

200-2=198 198:3=66

~~40~~

~~490:3=~~

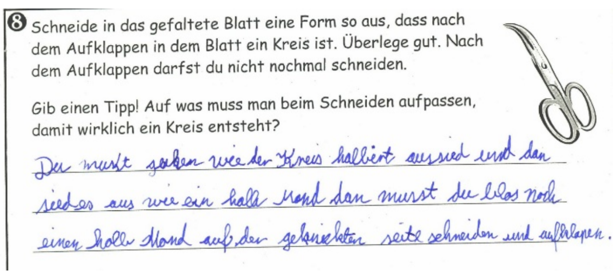
66·2=132

132+66=198

198+2=200

Abbildung 5. Beispiel der erfolgreichen Bearbeitung einer herausfordernden Aufgabe aus Rubrik 5.

Abbildung 6 zeigt eine Aufgabe, in der die Kinder handelnd tätig sein konnten, eine Figur ist auszuschneiden. Zur Auflockerung war es üblich eine solche Tätigkeits-Aufgabe während der ZMO vorzusehen (außer Schneiden z.B. Streichhölzer oder Münzen legen). Das gefaltete Blatt gehörte mit zu den Aufgabenunterlagen. Um das Mitbringen einer Schere war gebeten worden, Reservescheren standen ausreichend zur Verfügung. Die Mädchen erzielten im Schnitt 2,25, die Jungen 2,20 Punkte. Tatsächlich ist es nicht einfach, ein Objekt auszuschneiden, das einem Kreis nahekommt. Im vorliegenden Fall wird deutlich, dass das Kind über die Vorstellungskraft verfügt, im zu erzeugenden Kreis einen aufgeklappten Halbmond zu sehen.



8 Schneide in das gefaltete Blatt eine Form so aus, dass nach dem Aufklappen in dem Blatt ein Kreis ist. Überlege gut. Nach dem Aufklappen darfst du nicht nochmal schneiden.

Gib einen Tipp! Auf was muss man beim Schneiden aufpassen, damit wirklich ein Kreis entsteht?

Du must gacken wie der Kreis halbiert aussied und dan sied es aus wie ein halb Mond dan musst du blos noch einen halb Mond auf der geknickten seite schneiden und aufklapen.

Abbildung 6. Beispiel der erfolgreichen Bearbeitung einer Aufgabe aus Rubrik 6.

RUBRIK 7: ENDE GUT – ALLES GUT

Die Teilnahme an einer Olympiade ist anstrengend. So wie die Kinder mit der Einstiegsaufgabe gut in die ZMO eingeführt werden sollten, so sollten sie auch gut entlassen werden mit einer Entspannungs-Aufgabe, typischerweise eine Labyrinthaufgabe ähnlich wie in Abbildung 7. Zur Aufgabenbearbeitung gehört auch, sich mit der Aufgabenstellung auseinander zu setzen. Interessant sind dabei die Ausdrucksmöglichkeiten der Kinder. Im vorliegenden Fall nutzt das Kind neben Antwortsätzen ikonische Darstellungen, um deutlich zu machen, wie es sich vorstellt, das vorgegebene Labyrinth schwieriger bzw. einfacher zu machen.

Abbildung 7. Beispiel der erfolgreichen Bearbeitung einer Aufgabe aus Rubrik 7.

AUSBLICK – REISE IN DIE ZUKUNFT

Mathematisches Denken und Problemlösen ist ein hochkomplexes, bislang aus kognitiver Sicht kaum verstandenes Terrain. Insbesondere ist unklar, worin genau die Ursachen für Unterschiede in den Problembewältigungen zwischen Mädchen und Jungen bestehen könnten, oder auch, welche Bedingungen erfolgreiche Problembewältigungen befördern. Orientierung bieten Veröffentlichungen zu geschlechtsspezifischen Unterschieden, von denen mittlerweile zahlreiche vorliegen – für einen ersten Überblick siehe z.B. Becker et al. (2007).

Wir möchten hier einem wichtigen Aspekt nachgehen – dies passend zu den obigen inhaltlichen Ausführungen zur Bedeutung von Konstruktionsprozessen als Ausgangspunkt zur Grundlegung der natürlichen Zahlen und damit der Arithmetik. Dazu betrachten wir eine QuaDiPF-Aufgabe zum schlussfolgernden logischen Denken, deren Format auf Spearman (1904) zurückgeht. Zu überlegen ist, welche Figur, die unten rechts fehlt, eine 3x3-Anordnung von bislang acht Figuren geeignet komplettieren würde (Beispiel siehe Abbildung 8 (Schwank, 1998, 2003)). Bemerkenswert ist, dass sich eine gut passende Lösungsfigur anhand zweier höchst unterschiedlicher Vorgehensweisen ermitteln lässt. Bei einer *prädikativ-logischen* Analyse erfährt die gegebene Figuren-Anordnung Struktur durch das Erkennen von gemeinsamen Elementen, die sich dann für die Annahme einer Lösungsfigur

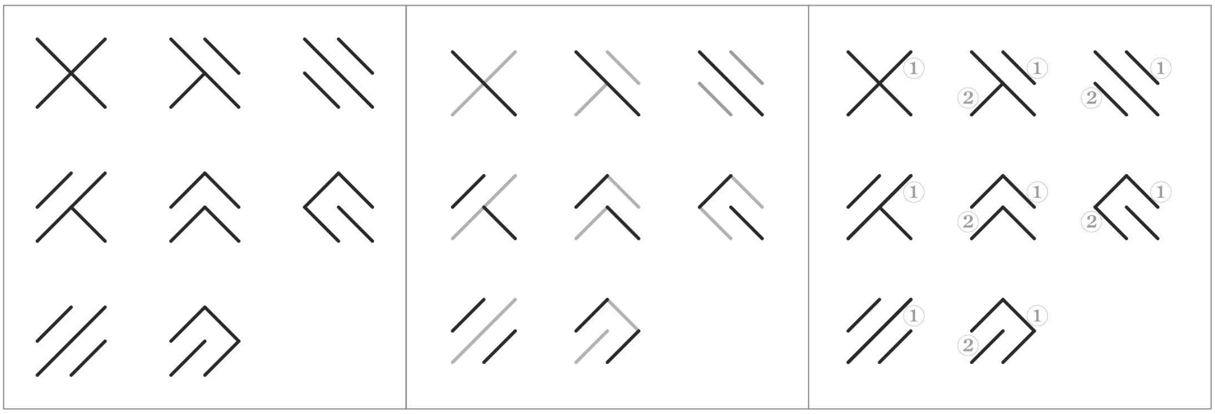


Abbildung 8. Links: Beispiel einer QuaDiPF-Aufgabe.
Mitte: prädikativ-logische Analyse. Rechs: funktional-logische Analyse.

verwenden lassen: Im vorliegenden Fall bleiben die ‚Diagonalen' einerseits zeilenweise (schwarze Linien) und andererseits spaltenweise (graue Linien) gleich. Damit ergibt sich die Lösungsfigur als Komposition der in der letzten Zeile und Spalte als gleich zu berücksichtigenden ‚Diagonalen'. Bei einer *funktional-logischen Analyse* sind das die Figuren verbindende Element Aktionen, die die Figuren in einer zeitlichen Reihenfolge auseinander entstehen lassen: Zeilenweise wird zunächst die rechte obere Linie gedreht, dann die linke untere. Spaltenweise passiert dies zunächst mit der linken oberen, dann mit der rechten unteren Linie. Die Lösungsfigur ergibt sich aus einer Anwendung dieses Veränderungsprozesses auf die Ausgangsfigur in der letzten Zeile bzw. Spalte. Im prädikativ-logischen Fall ist das Einlassen auf die statischen Strukturelemente Kernstück des kognitiven Erschließens, im funktional-logischen Fall das Einlassen auf die dynamischen Konstruktionsprozesse. Die Fähigkeit zum funktional-logischen Managen von Gegebenheiten ist offenkundig nützlich, um sich sinnhaft in den durch die natürlichen Zahlen gegebenen Zahlenraum einzufinden: Durch geeignete Konstruktionen gelangt man von vorgegebenen Zahlen zu anderen, mittels von Konstruktionen können Beziehungen zwischen Zahlen hergestellt werden. Von Anfang an zeigte sich, dass Jungen eher als Mädchen zur funktional-logischen Analyse neigen (Schwank, 1994).

Dieser Befund harmonisiert mit bekannten Forschungsergebnissen und stellt funktional- bzw. prädikativ-logisches Denken in den Kontext zu anderen untersuchten Konstrukten. Auf drei solcher Ergebnisse sei hier eingegangen:

(1) *Mentales Rotieren*: In der Originalversion sind zweidimensionale Zeichnungen von dreidimensionalen Würfelketten darauf hin zu untersuchen, ob es sich um unterschiedliche oder gleiche, im Raum lediglich verschieden gedrehte Würfelketten oder (zusätzlich) gespiegelte handelt (Shepard & Metzler, 1971). Dieses Aufgabenformat ist nicht nur berühmt geworden, weil damit ein Nachweis für kognitive sprachunabhängige Leistungen erbracht werden konnte, sondern auch, weil sich in zahlreichen Studien hochsignifikante Unterschiede in den Leistungen zu Gunsten von Männern im Vergleich von Frauen herausstellten

(z.B. Voyer, Voyer, & Bryden, 1995; zu neueren Aspekten mit Variationen der Aufgabendarstellung s. z.B. Fisher, Meredith & Gray, 2018). Ein eingeschränktes Vermögen zum mentalen Rotieren erschwert die funktional-logische Analyse einer QuaDiPF-Aufgabe wie in Abbildung 8. Dies ist ein Beispiel für die Dekomposition der Fähigkeit zum funktional-logischen Denken in seine Teilkomponenten oder dazu notwendigen kognitiven Basisfertigkeiten.

(2) *Unterschiedliches Spielverhalten*: Die Entwicklung kognitiver Fähigkeiten ist (neben z.B. genetischen Prädispositionen) erfahrungsabhängig. Es scheint so, als ob die kognitive Entwicklung von Jungen zumindest in einem relevanten Bereich, dem Spielverhalten, von früh an an andersartige Erfahrungen gebunden ist als diejenige von Mädchen (s. z.B. Ruble, Martin & Berenbaum, 2006): Dies äußert sich nicht nur in signifikanten Befunden zu präferiert gewähltem Spielzeug, das genutzt wird: z.B. Transportfahrzeuge, Bälle bei den Jungen; Puppen, Puzzle bei den Mädchen – sondern auch in der Spielausübung: z.B. Spiele mit erhöhten physischen Aktivitäten (wie toben, raufen, klettern) bei den Jungen; auf engeren Raum beschränkten physischen Aktivitäten (wie Puppenstuben, -küchenspielen) bei den Mädchen und zwar mit einem vergleichsweise erhöhten verbalen Anteil. Es bleibt, weiter zu untersuchen, wie sich bestimmte Tätigkeitserfahrungen auf kognitive Fähigkeiten auswirken. Hinsichtlich der Entwicklung funktional-logisches Denken ist hier ein besonderer Fokus zu setzen.

(3) *Sprachliche Fähigkeiten*: Es gibt zahlreiche Studien, die einen Unterschied zu Gunsten von Frauen aufzeigen (s. z. B. Ullman, Miranda & Travers, 2007). Vermutet wird u. a. ein Vorteil bei Frauen im Nutzen des deklarativen Gedächtnisses, bei den Männern eher ein Vorteil im Nutzen des prozeduralen Gedächtnisses. Bezüglich der QuaDiPF-Aufgaben ist auffällig, dass bei funktional-logischen Analysen oftmals eine deiktische Sprache zum Einsatz kommt ohne die behandelnden Objekte näher sprachlich zu fassen (mit dem hier passiert das) während bei prädikativ-logischen Analysen Wörter wie Behälter funktionieren, in denen gleichartige Objekte eingesammelt werden (Mengenbildung, Verwendung von Bezeichnungen wie: diese Diagonalen). Die Konstrukteurin der o. g. Beispiel-QuaDiPF-Aufgabe (Abb. 8), für die sich die Linien der Ausgangsfigur schlicht zu einer flächigen Figur umklappen, nahm erstaunt zur Kenntnis, dass Johann Sjuts auf einen Blick die Invarianz der Diagonalen der einzelnen Figuren als Struktur manifestierendes Element ausmachte.

Sich mit geschlechtsspezifischen Unterschieden zu beschäftigen, ist ein heikles Unterfangen. Gleichwohl sehen wir Bedarf, sich generell verstärkt um die Unterschiedlichkeit von Kindern zu kümmern. Herausforderung in der Zukunft wird sein, die individuellen kognitiven Grundlagen mathematischen Denkens und Problemlösens verstärkt zu erforschen und so mit daran zu arbeiten, die adressatenorientierte, unterrichtliche Entwicklung dieser Fähigkeiten noch erfolgreicher zu gestalten.

Literaturverzeichnis

Becker, J. B., Berkley, K. J., Geary, N., Hampson, E., Herman, J. P., & Young, E. (Eds.) (2007). *Sex Differences in the Brain: From Genes to Behavior.* Oxford: Oxford University Press.

Brainerd, C. (1979). *The Origins of the Number Concept.* New York: Praeger.

Bruner, J. (1973/1964). Der Verlauf der kognitiven Entwicklung. In D. Spanhel (Hrsg.), *Schülersprache und Lernprozesse*. Düsseldorf: Schwann.

Cassirer, E. (1910): *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundlagen der Erkenntniskritik*. Berlin: Verlag von Bruno Cassirer.

Dantzig, T. (1930). *Number, the Language of Science*. New York: The Macmillan Company.

Dedekind, R. (1969/1887). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.

Fisher, M.L., Meredith, T. & Gray, M. (2018). Sex Differences in Mental Rotation Ability Are a Consequence of Procedure and Artificiality of Stimuli. *Evolutionary Psychological Science*, 4, 124–133.

Frege, G. (1977/1884). *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* 2. Nachdruckauflage. Hildesheim: Georg Olms.

Gallin, P. (2012). *Die Praxis des dialogischen Lernens in der Grundschule. Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen*. Kiel: IPN.

Gowers, T. (2002). *Mathematics. A very short introduction*. Oxford: University Press.

Hefendehl-Hebeker, L. (2001). Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser, B. Wollring, B. (Hrsg.): *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe. Festschrift für Siegbert Schmidt.* (S. 83-98). Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

Lenchner, G. (1997). *Math Olympiad Contest Problems for Elementary and Middle Schools.* East Meadow, NY: Glenwood Publications.

Meschkowski, H. (1969). *Wandlungen des mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

Natorp, P. (1910). Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften. Leipzig: Teubner.

Käpnick, F. (2001). *Mathe für kleine Asse.* (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler). Berlin: Volk und Wissen.

Ruble, D. N., Martin, C. L., & Berenbaum, S. A. (2006). Gender Development. In N. Eisenberg (Ed.), *Handbook of Child Psychology. Volume 3. Social, Emotional, and Personality, Development* (6th ed. pp. 858-932). New York: Wiley.

Schwank, I. (1994). Zur Analyse kognitiver Mechanismen mathematischer Begriffsbildung unter geschlechtsspezifischem Aspekt. ZDM-Analysenheft "Frauen und Mathematik". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 2, 31-40.

Schwank, I. (1998). *QuaDiPF. Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken.* Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2003). Einführung in funktionales und prädikatives Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35(3), 70-78.

Schwank, I. (2013). Kleine Einsen und ein Wunderwerk. Die Zwergen-Mathe-Olympiade. *Grundschule,* 11, 16-19 & IX-XV (Beihefter „Grundschule Extra“).

Schwank, I. (2014). *Kinder in ihrem mathematischen Talent wertschätzen – Olympische Aufgabensammlung.* Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I., & Nowinska, E. (2008). Die Denkform des Formeldenkens. In B. Barzel, T. Berlin & A. Fischer (Hrsg.): *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 111-122.) Hildesheim: Franzbecker.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense – making in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 334-370). New York: MacMillan.

Shepard, R., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, 171, 701–703.

Spearman, C. (1904). General intelligence, objectively determined and measured. *American Journal of Psychology* 15, 201-293.

Ullman, M. T., Miranda, R. A., & Travers, M. L. (2007). Sex Differences in the Neurocognition of Language. In J. B. Becker, K. J. Berkley, N. Geary, E. Hampson, J. P. Herman & E. Young (Eds.) (2007). *Sex Differences in the Brain: From Genes to Behavior* (S. 291-311). Oxford: Oxford University Press.

Voyer, D., Voyer, S., & Bryden, M. P. (1995). Magnitude of sex differences in spatial abilities: a meta-analysis and consideration of critical variables. *Psychological Bulletin*, 117, 250–270.