Unredigierte Manuskriptfassung des Artikels:
Schwank, I. (2021).
Gesucht: 4 spezielle Zahlen mit 45 in Summe - Graphische Darstellungen als Erkenntnismittel.
In: L. Baumanns, B. Rott & N. Sturm (Hrsg.): Mit Abstand die beste Tagung. Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen in Köln 2012, (S. 97–114). Münster: WTM).

GESUCHT: 4 SPEZIELLE ZAHLEN MIT 45 IN SUMME – GRAPHISCHE DARSTELLUNGEN ALS ERKENNTNISMITTEL

Inge Schwank

Universität zu Köln

https://doi.org/10.37626/GA9783959871945.0.07

Abstract. Schülerinnen und Schüler sollen in ihrer Fähigkeit zum mathematischen Problemlösen gestärkt werden. Dazu müssen ihnen Zugänge zu mathematischen Problemen geschaffen werden. Bekannt sind die nützlichen Hinweise von Pólya zur Problembearbeitung. Zeichnungen (figures) spielen dabei eine wichtige Rolle. Junge Schülerinnen und Schüler, denen die nützliche Symbolsprache der Algebra noch nicht zur Verfügung steht, könnten in besonderer Weise vom Einsatz von Bildern, Skizzen, allgemein graphischen Darstellungen, profitieren, da sie anhand dieser Repräsentationsformen komplexere mathematische Zusammenhänge gleichwohl durchdenken und sich erschließen können. Dies würde eine besondere Förderung der Entwicklung ihres mathematischen Denkens bedeuten. Solange die Auffassung verbreitet ist, formale Mathematik sei die ‚richtige' Mathematik, besteht noch Aufklärungsbedarf. Auch am Beispiel einer Problembearbeitung, entnommen einer Mathematik-Olympiade für Drittklässlerinnen und Drittklässler mit unzureichendem Einsatz graphischer Darstellungen, zeigt sich, dass noch weitere Anstrengungen unternommen werden müssen. Zur Übung – gerade auch für Erwachsene – und Veränderung ihres Blicks können Beispiele, die in nicht-mathematikdidaktischer Literatur zu finden sind und bei denen auf erhellende graphische Darstellungen verzichtet wird, dienen. Die Beschäftigung mit dem Themenkomplex reicht in der Mathematikdidaktik weit zurück.

1 ROLLE VON BILDERN UND SKIZZEN BEIM PROBLEMLÖSEN

Liegt ein mathematisches Problem vor, ist die Frage, wie ein Zugang zu diesem Problem gefunden werden kann. Es gilt, in das Problem einzutauchen, es zu verstehen. In der von vielen aufgegriffenen Pólya'schen Anleitung zur Bearbeitung mathematischer Probleme sind folgende vier Phasen vorgesehen (Pólya, 1957, S. 5ff):

- Understanding the problem
- Devising a plan
- Carrying out a plan
- Looking back

Das Verstehen des Problems spielt die erste und entscheidende Rolle.

In L. Baumanns, N. Sturm & B. Rott (Hrsg.), *Mit Abstand die beste Tagung. Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2020* (S. x–y). Münster: WTM.

Wie kann ein solches Verstehen unterstützt werden? Wie kann ein Zugang zu einem Problem gefunden werden? In seltenen Fällen mögen „exceptionally bright idea“ / „lucky ideas“ aufflammen:

> Each of these phases has its importance. It may happen that a student hits upon an exceptionally bright idea and jumping all preparations blurts out with the solution. Such lucky ideas, of course, are most desirable, but something very undesirable and unfortunate may result if the student leaves out any of the four phases without having a good idea. The worst may happen if the student embarks upon computations or constructions without having *understood* the problem. (Pólya, 1957, S. 6)

Ohne eine gute Idee, ohne ein Problemverständnis ist keine erfolgreiche Problembearbeitung möglich. Es liegt auf der Hand, im Falle geometrischer Probleme mit Zeichnungen zu arbeiten.

> If there is a figure connected with the problem he should draw a figure and point out on it the unknown and the data. (Pólya, 1957, S. 6)

Die Bedeutung von Zeichnungen reicht für Pólya jedoch weit über geometrische Anwendungsfälle hinaus.

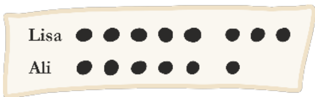
> **Figures** are not only the object of geometric problems but also an important help for all sorts of problems in which there is nothing geometric at the outset. (Pólya, 1957, S. 108)

Denken in unterschiedlichen Repräsentationsformen ist mit den Arbeiten von Jerome Bruner (1964) weithin bekannt geworden. Zur Bedeutung von Darstellungsarten für arithmetisches Denken siehe z. B. Hefendehl-Hebeker & Schwank (2015). Noch wird das Denken in Bildern und anhand von Skizzen im Vergleich zum Denken in Sprache zu oft als weniger intellektuell verkannt.

Fortschritte zeichnen sich ab. Mittlerweile finden sich etwa in der Rubrik „Kompetenz Modellieren“ im Kontext von Sachaufgaben in Mathematikschulbüchern „*Bilder*“ und „*Skizzen*“ schon ab der 1. Jahrgangsstufe explizit als Aufgabenbestandteile bzw. in nützlichen Hinweisen (z. B. Betz et al., 2016, 2017a, 2017b, 2020). Diese beiden Bezeichnungen für graphische Darstellungen sind daher in der Überschrift für diesen Abschnitt übernommen worden. Zwei Beispiele für Aufgaben dieser Art sind:

Manchmal hilft ein Bild. Wie kannst Du rechnen?

Lisa hat 8 Bonbons. Ali hat 6.
Wie viele hat Lisa mehr?



(1. Jahrgangsstufe, Betz et al., 2016, S. 97; Bild selbst nachgezeichnet)

Zeichne Skizzen. Löse die Aufgaben.
Paul ist 1 m 38 cm groß, Stefan ist 5 cm kleiner.
Ben ist 8 cm größer als Paul. Tim ist 13 cm kleiner als Ben. Wie groß ist jeder?
(3. Jahrgangsstufe, Betz et al., 2017a, S. 66)

Außer von Bildern und Skizzen zu sprechen, werden auch einige andere Ausdrücke / Konzepte für graphische Darstellungen verwendet, die hier aber nicht eingehender betrachtet und verglichen werden sollen; darunter sind: iconic representation (Bruner, 1964, S. 2), concrete representations other than words; mental picture / mental imagery (Hadamard, 1945, S. 71, siehe hier u. a. auch einen Verweis auf Eulers Logik-Unterricht einer schwedischen Prinzessin, S. 76), geometrische Visualisierung (Hefendehl-Hebeker, 2011, S. 89), informative Figur (Rott, 2018, S. 2), visuelle Vorstellung (van der Waerden, 1954, S. 166). Zu beachten ist, dass zwischen externen und internen Repräsentationen, zwischen Darstellungen und Vorstellungen zu unterscheiden ist; deren Zusammenspiel ist noch wenig erforscht.

Die Fähigkeiten zur Visualisierung, zu graphischen Darstellungen können beim Problemlösen eine fundamentale Rolle spielen und wesentlich zum Erfolg einer Problembearbeitung beitragen. Zumindest gehört dieser Fähigkeitskomplex zu den wichtigen, die einen „scholar of mathematics" auszeichnen:

> To be a scholar of mathematics you must be born with talent, insight, concentration, taste, luck, drive and the ability to visualize and guess. (Halmos, 1984, S. 400)

In der Mathematikdidaktik wird daran gearbeitet, wie diese Fähigkeit noch besser entwickelt und entfaltet werden kann, auch für Schülerinnen und Schüler, denen die Beschäftigung mit Mathematik nicht leichtfällt. Zur Erschließung von Problemlösungen anhand von graphischen Darstellungen werden im Folgenden einige Beispiele präsentiert.

2 SUMME 45 MITTELS VIER SPEZIELLER ZAHLEN

Die Informatikerin Katharina Zweig führt im Kontext ihrer Klärung des Unterschieds von Algorithmus und Heuristik ein Beispiel für „Herumprobieren" an und bemerkt: „Nun, »Herumprobieren« ist kein Algorithmus – es ist eine sogenannte **Heuristik**." (Zweig, 2019, S. 52).

Das Beispiel, das sie dazu betrachtet, lautet:

> Welche vier Zahlen ergeben in der Summe 45 und gleichzeitig genau dieselbe Zahl, wenn man zur ersten Zahl 2 addiert, von der zweiten 2 abzieht, die dritte durch 2 teilt und die vierte mit 2 multipliziert? (Zweig, 2019, S. 51)

Im Anhang gibt sie noch eine Formalisierung zu dieser Problemstellung an:

> Anmerkung 24: Wer es lieber formaler mag, hier bitteschön. Gesucht sind die Zahlen u, v, x und y, so dass gilt u+2 = v-2 = x/2 = y*2 und u+v+x+y = 45. (ebd., S. 291)

Ihr Bearbeitungsvorschlag bedient sich rein sprachlicher Mittel:

> Wie kommt man jetzt zur Lösung? Durch ein paar kleine Überlegungen kann man erste Kandidaten eingrenzen und dann durchprobieren: Man stellt zuerst fest, dass der Unterschied zwischen den beiden ersten Zahlen 4 sein muss, da ja die Addition von 2 zur

> kleineren Zahl dieselbe Zahl ergeben muss wie das Abziehen von 2 von der größeren. Daraus folgt auch, dass entweder beide Zahlen gerade oder beide ungerade sein müssen. Für die anderen beiden Zahlen muss gelten, dass das Vierfache der kleineren Zahl die größere ergibt – da das Zweifache der vierten Zahl dieselbe Zahl wie die Hälfte der dritten Zahl ist. Das Vierfache einer Zahl ist immer gerade – damit die Summe aller vier Zahlen ungerade sein kann, muss also die vierte Zahl notwendigerweise ungerade sein. Sie könnte also 1, 3, 5, 7, … sein, die anderen Zahlen ergeben sich zwangsläufig, wenn diese Zahl gesetzt ist. Wenn die vierte Zahl 1 ist, dann ist die dritte Zahl 4, die erste und zweite sind 0 und 4. Damit ist aber die Summe 9. Durch solches **Herumprobieren** finden wir heraus, dass die vierte Zahl 5 sein muss: Dann ist die dritte Zahl 20, die erste 8, und die zweite ist 12, in der Summe also 45. (ebd., S. 50-51)

Obwohl Katharina Zweig selbst gerne zeichnet und ihr Buch mit zahlreichen eigenen Zeichnungen wie auch solchen, die gemeinsam mit Sandra Schulze entstanden sind (Zweig, 2019, S. 319), angereichert hat, verzichtet sie bei dieser Problemstellung auf eine erhellende Zeichnung. Weder ihre Problemstellung noch ihr Bearbeitungsvorschlag sind – wie Erfahrungen in Lehrveranstaltungen im Lehramt Mathematik belegen – für viele einfach zu verstehen und nachzuvollziehen.

Versuchen wir, in die Zahlenverhältnisse einzutauchen. Mit allen vier gesuchten Zahlen wird dasselbe Ergebnis erzielt (*die Vergleichszahl* Z_v), wenn mit jeder von ihnen eine bestimmte Rechenoperation durchgeführt wird. Aus den Angaben zu den Verhältnissen zwischen den vier gesuchten Zahlen folgt: Die ersten beiden Zahlen sind ähnlich groß (einmal wird 2 addiert, einmal wird 2 abgezogen), die dritte Zahl ist vergleichsweise besonders groß (sie wird durch zwei geteilt), die vierte Zahl ist vergleichsweise besonders klein (sie wird mit zwei multipliziert). Um auf 45 zu kommen, muss als Schätzwert jede der vier Zahlen im Schnitt ca. 10 beitragen. Bei der vierten Zahl mit 1 zu beginnen, ergibt keinen Sinn, da dann offenkundig in der Summe nicht genügend weit vorangekommen werden kann. Herumprobieren als gute Heuristik bedeutet nicht wahlloses Probieren oder gar alle Fälle (soweit möglich) zu betrachten, sondern vielmehr *zielführendes* Probieren. Dafür muss aber ein Ziel ausgemacht sein und während des Probierens eine Orientierung an diesem Ziel eingehalten werden. Man könnte hier auch vom gezielten Ausleuchten des untersuchten Sachverhaltes sprechen.

Die Erreichbarkeit von 45 lässt sich am Zahlenstrahl darstellen (Abb. 1); tatsächlich gibt es viele Möglichkeiten, 45 mittels vier Summanden zu erreichen.

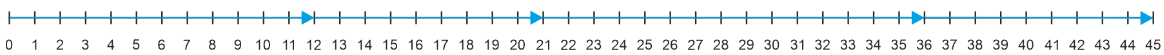


Abbildung 1: Eine Möglichkeit der Erreichbarkeit von 45 mit vier Summanden, dargestellt durch vier Pfeile am Zahlenstrahl von 0 bis 45.

Wie können die zwischen den vier Summanden vorliegenden Verhältnisse graphisch eingefangen werden? Eine Möglichkeit zeigt Abbildung 2a. Markant ist *die Vergleichszahl* Z_v, zu der alle vier Summanden in vorgegebener Weise umformbar sind. Diese sei mit einer senkrechten Linie dargestellt, die gesuchten Summanden als graue Rechtecke. Bezüglich der Z_v-Linie ist die erste Zahl Z_1 um zwei kleiner, die zweite Zahl Z_2 um zwei größer, dies zeigen jeweils zwei blaue Kreise an, links der Z_v-Linie zu Z_1, rechts der Z_v-Linie zu Z_2. Es fällt sofort auf, dass statt mit Z_1 und Z_2 auch zweimal mit Z_v gerechnet werden könnte. Weiter ergibt sich die Vergleichszahl Z_v als die Hälfte der dritten Zahl Z_3 und als das Doppelte der vierten Zahl Z_4, dies ist jeweils durch einen blauen Streifen dargestellt, rechts der Z_v-Linie für Z_3, links der Z_v-Linie für Z_4.

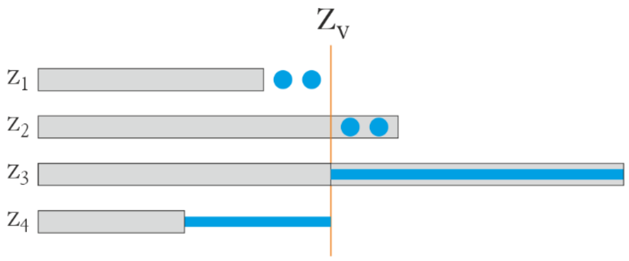


Abbildung 2a: Die gesuchten vier Summanden sind graphisch in Bezug gesetzt zu *der Vergleichszahl* namens Z_v: vertikale Linie. Sie repräsentiert das gleichlautende Ergebnis bei den durch die Aufgabenstellung festgezurrten spezifischen Relationen der vier Summanden zu eben dieser Vergleichszahl. Die Beschriftungen sind hilfreich, aber für die Problembearbeitung nicht zwingend notwendig, wenn man selbst weiß, welche der Zahlen an welcher Stelle jeweils gemeint ist.

Wählt man als erste Näherung für die Vergleichszahl Z_v 10 (liegt in der richtigen Größenordnung und mit 10 lässt sich bequem rechnen), so sieht man sofort die Bestandteile: 20 aus den ersten beiden Zeilen, nochmal 20 aus der dritten Zeile und 5 aus der vierten Zeile, in Summe 45. Die Zahlen im Beispiel erweisen sich als nett gewählt, sprich es fällt kein großer rechnerischer Aufwand an, Nachjustieren ist nicht notwendig. Mittels der Graphik ergibt sich Z_1 zu 8, Z_2 zu 12, Z_3 zu 20 und Z_4 zu 5. In der Überprüfung ergibt sich tatsächlich die gewünschte Summe: 8+12+20+5=45.

Aspekte wie Abstand um vier, Vierfaches oder gerade / ungerade können in die Überlegungen miteinfließen. Notwendig für eine erfolgreiche Problembearbeitung sind sie nicht, aber sie sind willkommen für den inhaltslastigen, ausgiebigen Diskurs in der jeweiligen Klassengemeinschaft.

Die angegebene graphische Darstellung (Abb. 2a) ist gleichermaßen schlicht wie erhellend, so dass ihr im Vergleich zur zitierten rein sprachlichen Darstellung der Vorzug gegeben werden kann.

Ohne Näherungs- bzw. Überschlagsrechnungen geht es auch. 45 kann gedacht werden als fünfundvierzig gleich große Einzelteile, z. B. blaue Plättchen. Es gilt zu ergründen, aus wie vielen dieser Plättchen sich die vier Summanden zusammensetzen. Wenn man mag, kann man die Summanden zu einem Zahlenstreifen von 0 bis 45 zusammensetzen (Abb. 2b). Leicht ablesbar ist, dass Z_v 4,5mal in 45 bzw. die Hälfte von Z_v 9mal in 45 enthalten ist und in Folge gilt $Z_v = 10$.

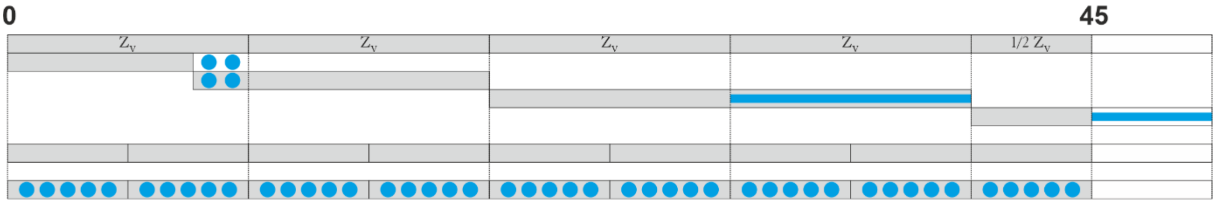


Abbildung 2b: Schlussfolgerungen aus den Angaben zu den vier Summanden, die in bestimmten Zusammenhängen zu einer Vergleichszahl Z_v stehen und in Summe 45 ergeben. Es ergeben sich 10 blaue Plättchen für Z_v bzw. 5 für ½ Z_v, da Z_v 4 ½-mal in 45 bzw. ½ Z_v 9-mal in 45 enthalten ist.

Natürlich könnte z. B. Abbildung 2a noch um weitere Beschriftungen ergänzt, eine Gleichung aufgestellt und diese aufgelöst werden (Abb. 3). Das wäre aber (nur) eine zusätzliche Formalisierungsübung und nicht notwendig, um den Gesamtzusammenhang gedanklich zu erfassen.

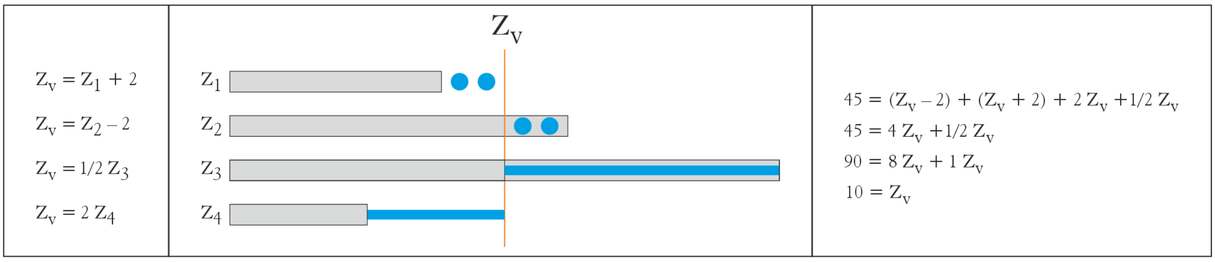


Abbildung 3: Graphische Darstellung des Zahlen-Sachverhaltes zur festgelegten Summe 45 mit der Charakteristik ihrer vier Summanden ergänzt um eine mögliche formal-symbolische Bearbeitung.

3 ZUSCHAUER-PROBLEM

Exemplarisch soll der Einsatz von graphischen Darstellungen bei der Bearbeitung eines herausfordernden Problems durch 172 Drittklässlerinnen und Drittklässler (86 Mädchen, 86 Jungen) vorgestellt werden. Zu ermitteln ist eine bestimmte Zuschauer-Verteilung:

> Im Zirkus Knobelix sitzen 224 Zuschauer. Es sind 38 Erwachsene mehr als Jungen und 6 Jungen mehr als Mädchen.
> Wie viele Mädchen, Jungen und Erwachsene sitzen auf den Zuschauerbänken? (Schwank, 2018, S. 72)

Von diesen 172 Kindern haben 23 Kinder, 5 Mädchen und 18 Jungen, das Problem erfolgreich bearbeitet. Diese Kinder nutzen dabei durchweg die formal-symbolische Repräsentationsform und nähern sich den Zielzahlen durch letztlich geschickte Berechnungen. Ein Beispiel zeigt Abbildung 4.

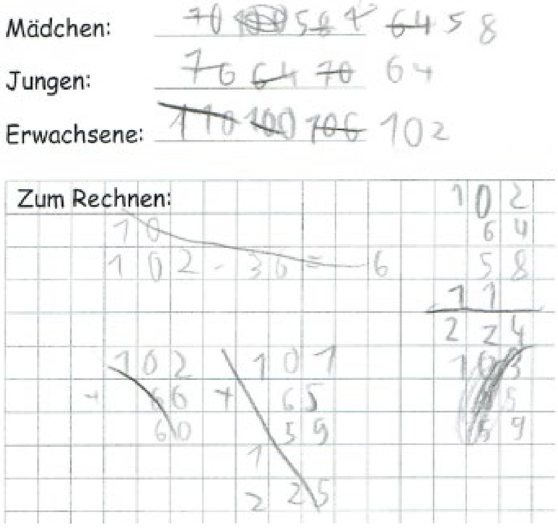


Abbildung 4: Zur Problemstellung werden die Ergebnisse 58 Mädchen, 64 Jungen und 102 Erwachsene ermittelt. Interessant ist z.B. das mehrfache Durchstreichen der Angabe 100 bei den Mädchen (zugrundeliegende Überlegung mag sein: 100 als Startwert bei den Mädchen kann nicht gut gehen, damit würden sich bereits über 300 Zuschauer ergeben). Die Bedingungen sind tatsächlich erfüllt: 58**+6**=64, 64**+38**=102, 58+64+102=**224**.

Die geringe Anzahl an erfolgreichen Bearbeitungen gibt Anlass zum Nachdenken. Insgesamt sind nur zehn graphische Darstellungen zu verzeichnen. In diesen finden sich die zu bedenkenden arithmetischen Zusammenhänge auch vom Ansatz her nicht wieder, eine Problemlösung ist hiermit nicht möglich.

Abbildung 5 zeigt verschiedene Versuche an Darstellungen, in denen Zuschauer – ohne zwischen Mädchen, Jungen und Erwachsenen zu unterscheiden – als kleine Kreise, Striche oder Strichmännchen gezeichnet sind sowie eine Kästchenanordnung (diese ist vom Kind leider wieder ausradiert worden, so dass von seinen Überlegungen nur noch wenig zu erkennen ist). Nur in den unteren beiden Fällen von Abbildung 6 liegt die Gesamtzuschauer-Zahl in einer passenden Größenordnung.

In Abbildung 6 könnte man in den beiden oberen Darstellungen ein Zirkuszelt, in der rechten auch eine Zirkusarena erkennen, Personen kommen nicht vor. In den nächsten beiden Darstellungen sieht man eine Zirkusarena mit einer Vielzahl an Zuschauern, zwischen Mädchen, Jungen und Erwachsenen ist dabei nicht unterschieden; in der rechten ist zusätzlich noch eine Aufführung mit zwei Seehunden zu sehen. Hier hat sich das Kind nicht nur sehr viel Mühe mit seiner Darstellung gegeben, sondern seine Zuschauerzahl auch nochmal kontrolliert: 16 oder 17 (ein Fall des Durchstreichens ist unklar) sind wieder durchgestrichen worden, so dass letztlich tatsächlich 224 bzw. 223 Zuschauer anwesend sind.

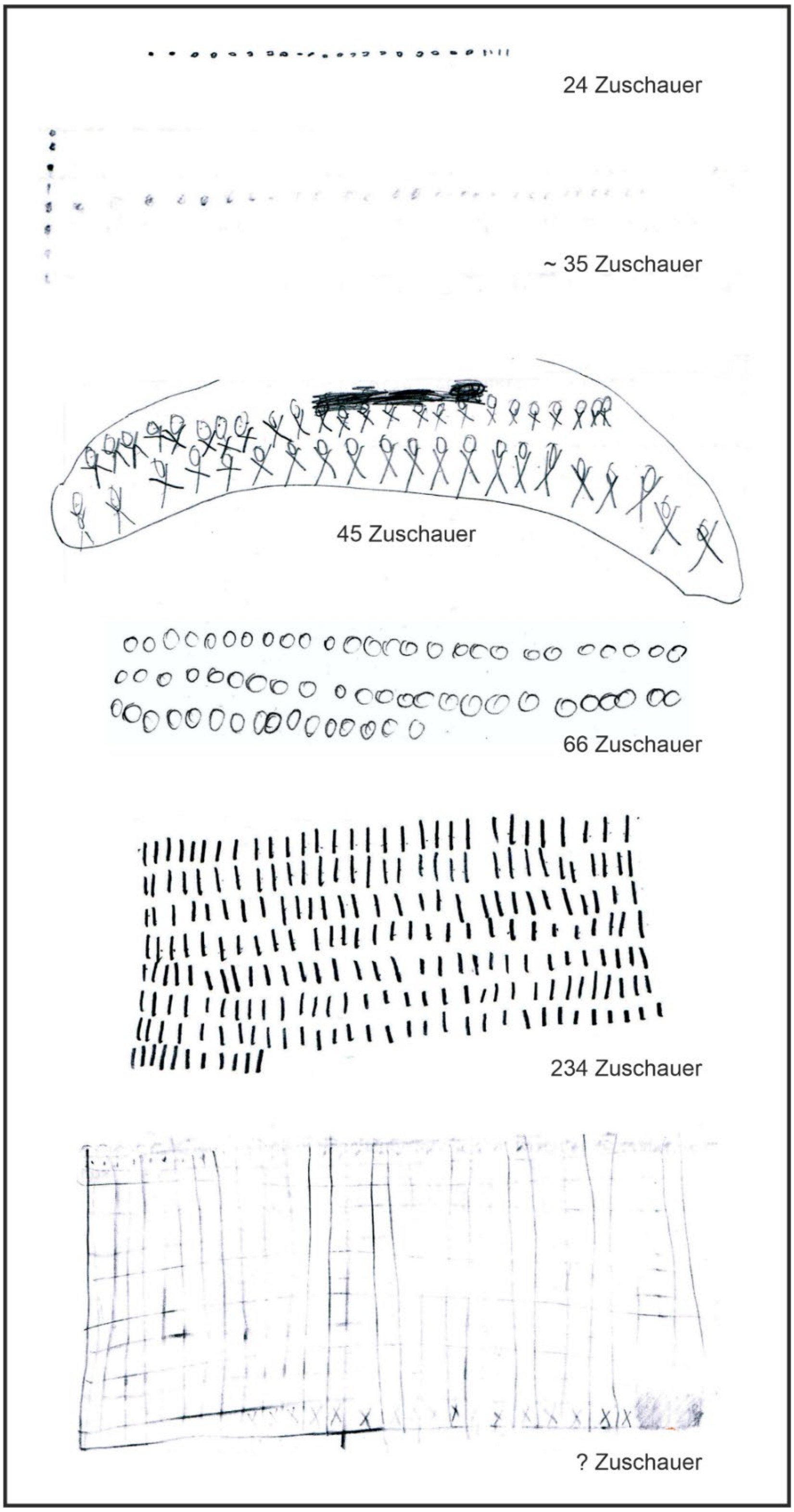


Abbildung 5: Graphische Darstellungen von Kindern zum Zuschauer-Problem. Der Kontrast der Bleistiftzeichnungen wurde zur Verdeutlichung angepasst.

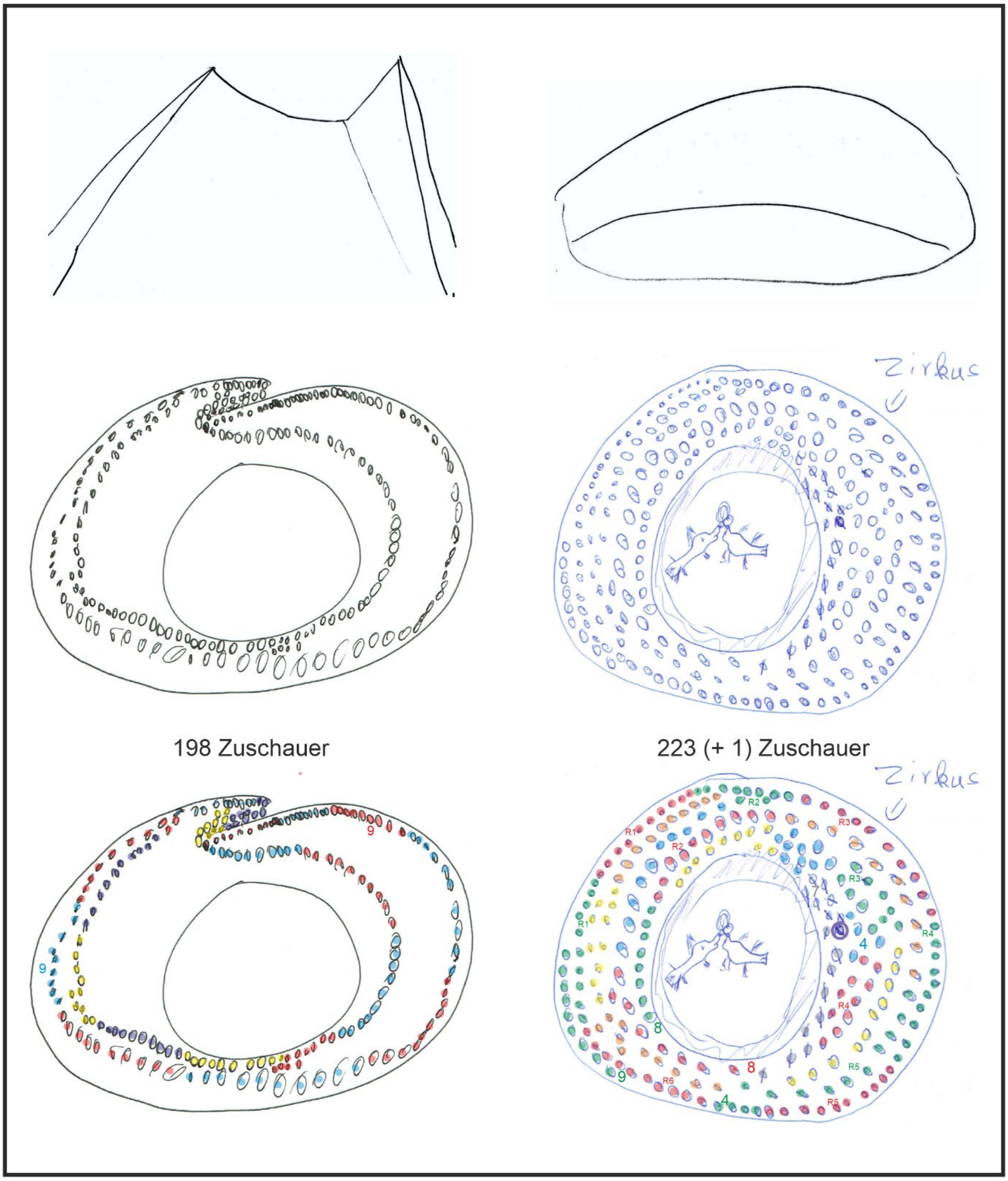


Abbildung 6: Weitere graphische Darstellungen von Kindern zum Zuschauer-Problem. Bei den beiden oberen Darstellungen wurde zur Verdeutlichung der Kontrast angepasst. Zu den beiden mittleren Darstellungen sind zusätzlich eingefärbte Varianten angegeben, um die Anzahl der Zuschauer besser ermitteln zu können.

Die Folge der Abbildungen 7a bis 7g ist eine Beispiel-Illustration dafür, wie die im Zuschauer-Problem formulierten arithmetischen Zusammenhänge graphisch erfasst werden können und sich daraus eine Problemlösung ergibt.

Es stellt sich heraus, dass die Anzahl der Mädchen dreimal in 224-(6+6+38) enthalten ist.

Abbildung 7a: Für die Gesamtzahl 224 der Zuschauer wird ein Zahlenstreifen von 0 bis 224 verwendet.

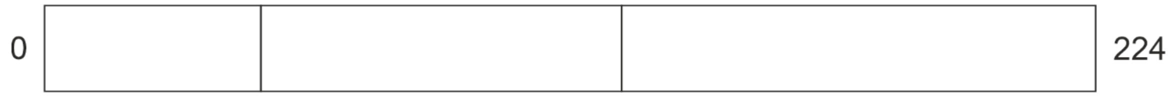


Abbildung 7b: Grundstruktur der Zuschauerverteilung. Die Anzahl der Mädchen, Jungen, Erwachsenen ist unterschiedlich.

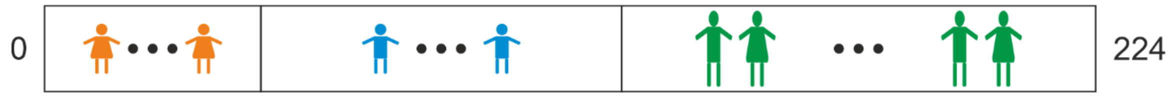


Abbildung 7c: Die Mädchen sind die wenigsten, die Erwachsenen die meisten, die Anzahl der Jungen liegt dazwischen.

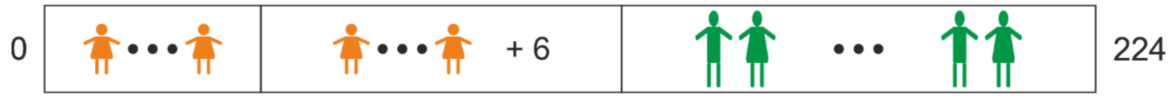


Abbildung 7d: Die Anzahl der Jungen lässt sich unter Rückgriff auf die Anzahl der Mädchen ausdrücken: Es sind 6 Jungen mehr als Mädchen.

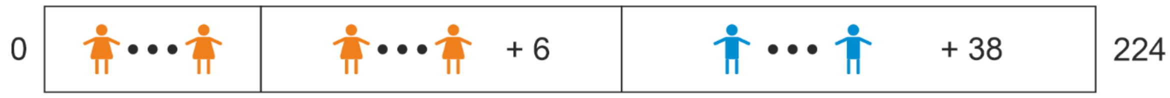


Abbildung 7e: Die Anzahl der Erwachsenen lässt sich unter Rückgriff auf die Anzahl der Jungen ausdrücken: Es sind 38 Erwachsene mehr als Jungen.

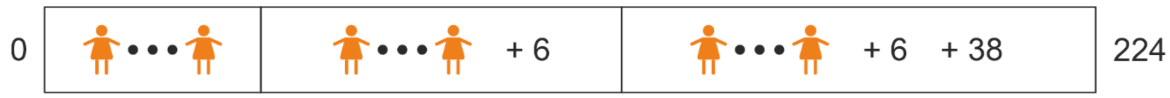


Abbildung 7f: Die Anzahl der Erwachsenen lässt sich unter Rückgriff auf die Anzahl der Mädchen ausdrücken. Es sind 6 Jungen mehr als Mädchen.

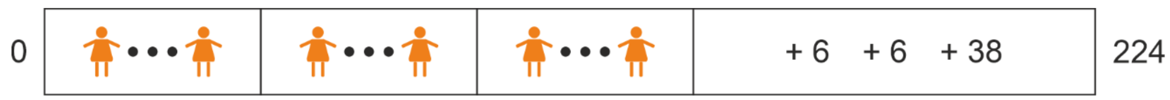


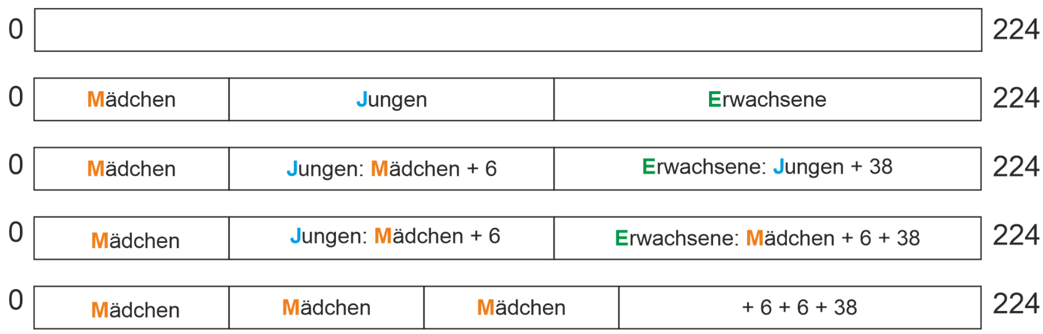
Abbildung 7g: Eine Umsortierung zeigt, dass sich die Zuschauerzahl ergibt aus dreimal der Anzahl der Mädchen zuzüglich +6 +6 +38.

Aus dieser Abfolge an Ersetzungen und der abschließenden Umsortierung lässt sich erkennen, dass zur Bestimmung der Anzahl der Mädchen gerechnet werden kann: (224 – (6+6+38)) / 3. Die Anzahl der Mädchen ist damit 58, die der Jungen 58+6=64, die der Erwachsenen 64+38=102. Die Überprüfung 58+64+102=224 zeigt, dass die ermittelten Anzahlen passen.

Im ersten Abschnitt wurde auf die Entwicklung in Grundschul-Mathematik-Lehrwerken hinsichtlich des Umgangs mit Bildern und Skizzen hingewiesen. Kinder sind noch mehr dazu anzuregen und darin zu unterstützen, mit graphischen Darstellungen beim Problemlösen zu arbeiten und zwar mit gut *strukturierten* graphischen Darstellungen anhand derer mathematische Zusammenhänge ersichtlich und weiter durchdacht werden können.

4 PROPÄDEUTIK DER ALGEBRA

Im Sinne von Hefendehl-Hebeker (2001) wird mit der graphischen Behandlung des Zuschauer-Problems eine Propädeutik der Algebra betrieben. Die graphische Darstellung der arithmetischen Zusammenhänge in ihrer operativen Struktur lässt sich auf Wörter übertragen und diese auf Buchstaben, die dann als Bezeichnungen für Variablen verwendet werden können und in die mathematische formale Schrift eingehen (Abb. 8).



$$M + J + E = 224$$
$$M + (M+6) + (J+38) = 224$$
$$M + (M+6) + ((M+6)+38) = 224$$
$$M + M + M\ (+6\ +6\ +38) = 224$$
$$3\ M + 50 = 224,\ 3\ M = 174,\ M = 58$$

Abbildung 8: Die Auseinandersetzung mit dem Zuschauer-Problem anhand graphischer Darstellungen kann eine hilfreiche Unterstützung bei der Anbahnung algebraischen Denkens sein. Die formal-symbolischen Gleichungen sind sehr kompakt, mit ihnen liegt in eleganter Weise der zu behandelnde Inhalt komprimiert vor. Buchstaben ohne zu wissen, wofür sie stehen, sind wertlos.

Vielfach ist bekannt, dass das Autokennzeichen K in Deutschland für die Stadt Köln steht. Das Zeichen K zu benutzen, erweist sich als recht praktisch. Ohne seine Bedeutung, die Kenntnisse seines kontextuellen Gebrauchs bleibt es bedeutungslos. Bei längeren Städtenamen wie Wuppertal (W) werden Gewinn (kognitive Entlastung einerseits) wie Ungemach (kognitive Belastung andererseits, W vielleicht doch für Wiesbaden?) noch deutlicher. Sich im Primarbereich um die Propädeutik der Algebra zu kümmern, ist jedenfalls ein lohnenswertes Anliegen. Kinder Bilder und Skizzen zu Problemstellungen entwerfen zu lassen, ist nicht nur in den Problembearbeitungs-Situationen selbst nützlich, sondern auch wichtig, um ein Fundament zu legen für spätere Problembearbeitungen, in denen deutlich mehr mathematischer Formalismus zum Tragen kommt, und zwar – mit den Worten von Hefendehl-Hebeker (2011, S. 89): die Symbolsprache der Algebra.

Sie diskutiert u.a. folgendes Problem:

> Addiert man zu der Summe zweier natürlicher Zahlen ihre Differenz, so erhält man das Doppelte der größeren Zahl. Subtrahiert man die Differenz von der Summe, so erhält man das Doppelte der kleineren Zahl. (ebd., 2011, S. 88-89)

Dieses Problem ist nur interessant für den Fall, dass die beiden Zahlen unterschiedlich groß sind. Ansonsten wäre die Differenz null und in Folge entspricht die Summe der beiden Zahlen zuzüglich ihrer Differenz dem Doppelten jeder der beiden im Rechenprozess verwendeten Zahlen, analog entspricht in Folge die Summe der beiden Zahlen minus ihre Differenz dem Doppelten jeder der beiden im Rechenprozess verwendeten Zahlen.

Für Hefendehl-Hebeker (2001, S. 89) war seinerzeit wichtig, die Bedeutung des repräsentativen Beispiels hervorzuheben. Sie gibt eine „Geometrische Visualisierung" für den Fall der beiden Zahlen 8 und 3 an. Wir nutzen hier zur Erfassung der Zusammenhänge wieder eine graphische Darstellung mit Rechtecken, die keine spezifische Größe der beiden zu betrachtenden Zahlen beinhalten (Abb. 9).

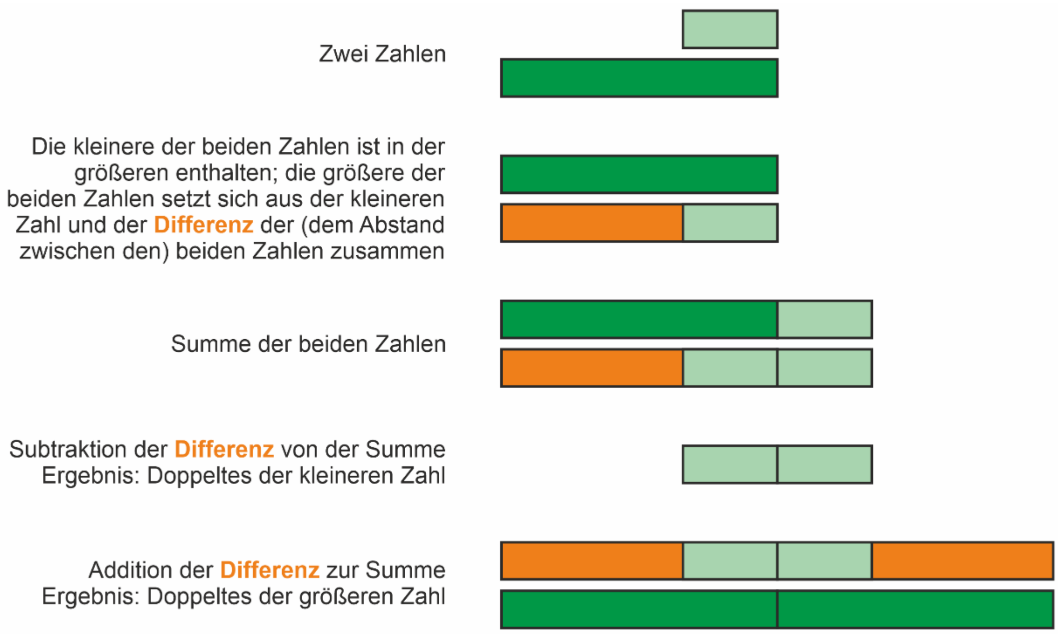


Abbildung 9: Von der Summe zweier Zahlen wird deren Differenz zum einen subtrahiert (weggenommen), zum anderen addiert (hinzugefügt). Im Ergebnis erhält man das Doppelte der kleineren bzw. der größeren Zahl.

Durch die Visualisierung wird unmittelbar ersichtlich, warum Doppelte der Ausgangszahlen entstehen: Wird die Differenz *weggenommen*, bleibt von der größeren Zahl nur noch der Anteil der *kleineren* Zahl übrig, wird die Differenz *dazufügt*, wird die Summe der beiden Zahlen um den Anteil ergänzt, der die kleinere Zahl zur *größeren* macht.

5 KONKRETE ALLGEMEINHEIT

Konkrete Allgemeinheit kommt einem Konstrukt wie der mathematischen Formel zu, das „das Besondere aller Arten in sich aufnimmt und es nach einer Regel entwickelt.“ (Cassirer, 1910, S. 26). Zur Verdeutlichung greift Cassirer ein Beispiel auf, das er Drobisch (1887, S. 22) entnommen hat. Es sind:

> zwei ganze Zahlen zu finden, deren Summe gleich 25, und von denen die eine durch 2, die andere durch 3 teilbar sei, … (Cassirer, 1910, S. 26)

Der vorgeschlagene Lösungsansatz besteht darin,

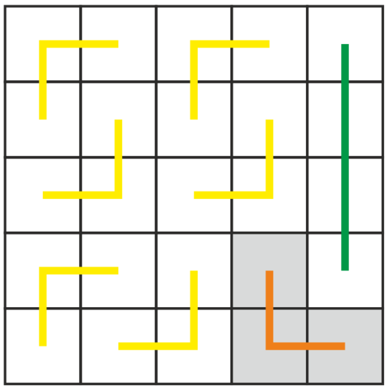
> daß sie [die Algebra] die zweite [Zahl] durch die Form 6z+3 ausdrückt, wo z nur die Werte 0, 1, 2, 3 haben kann, und woraus von selbst für die erste die Form 22 – 6z folgt, … (ebd.)

Auf eine Herleitung der beiden Formen und die Angabe der vier möglichen Lösungspaare verzichten Cassirer und Drobisch. Die Lösungsmöglichkeiten sind in Tabelle 1 berechnet.

z	1. Zahl $x_1 = 22 - 6z$	2. Zahl $x_2 = 6z + 3$	Summe
0	$22 - 6 \cdot 0 = 22$	$6 \cdot 0 + 3 = 3$	25
1	$22 - 6 \cdot 1 = 16$	$6 \cdot 1 + 3 = 9$	25
2	$22 - 6 \cdot 2 = 10$	$6 \cdot 2 + 3 = 15$	25
3	$22 - 6 \cdot 3 = 4$	$6 \cdot 3 + 3 = 21$	25

Tabelle 1: Gesucht sind zwei Zahlen x_1, x_2, die in Summe 25 ergeben, wobei die erste Zahl durch 2, die zweite Zahl durch 3 teilbar ist.

Abbildung 10 zeigt, wie sich mittels einer flächigen Struktur die algebraisch-arithmetischen Zusammenhänge darstellen und daraus die Lösungsmöglichkeiten ableiten lassen. 25 lässt sich als 25 kleine Quadrate angeordnet zu einem $5 \cdot 5$ Quadrat darstellen, dieses wird soweit als möglich mit einer (rechteckigen) $2 \cdot 3$ Struktur versehen. Die grau hinterlegte 3er-Anordnung ist nicht zu einer 6er-Anordnung zu vervollständigen, da ein einzelnes kleines Quadrat übrigbleiben würde, mit dem keine 2er-Ergänzung zu 25 möglich wäre; mit der verbleibenden 4er-Anordnung ist eine 2er-Ergänzung möglich. Damit steht fest, dass sich die 25er-Fläche zusammensetzen lässt aus 4 plus 3 kleinen Quadraten sowie einer Anzahl von zu Rechtecken zusammengefassten kleinen Quadraten, die entweder als 2•3 oder 3•2 gelesen werden können.



$$4 + 0{\cdot}2 + 3{\cdot}6 + 3 = 4 + 21$$
$$4 + 3{\cdot}2 + 2{\cdot}6 + 3 = 10 + 15$$
$$4 + 6{\cdot}2 + 1{\cdot}6 + 3 = 16 + 9$$
$$4 + 9{\cdot}2 + 0{\cdot}6 + 3 = 22 + 3$$

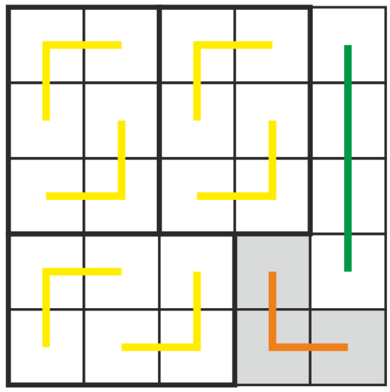


Abbildung 10: Die Möglichkeiten der Zusammensetzung der Summe 25 mittels einer durch 2 teilbaren Zahl und einer durch 3 teilbaren Zahl lassen sich anhand einer geeignet strukturierten Fläche ermitteln.

Am Zahlenstrahl (Abb. 11) können die gesuchten Zahlenpaare anhand von Treffpunkten sichtbar werden, diese sind die ungeraden Vielfache von 3, die von 0 aus in 3er-Schritten und von 25 aus in 2er-Schritten erreichbar sind.

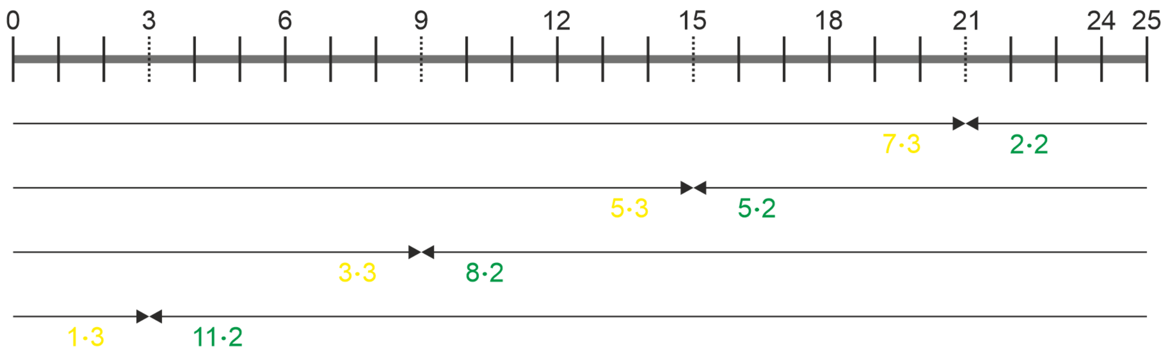


Abbildung 11: Zahlenstrahl mit Start 0, Ende 25 und eingetragener 3er-Reihe. Gepunktet sind am Zahlenstrahl die Linien zu denjenigen Vielfachen von 3, die von 25 aus in 2er-Schritten erreichbar sind.

n	25	=	(2n+1) · 3	+	25 – (2n+1) · 3
0	25	=	1 · 3	+	25 – 1 · 3
		=	1 · 3	+	11 · 2
1	25	=	3 · 3	+	25 – 3 · 3
		=	3 · 3	+	8 · 2
2	25	=	5 · 3	+	25 – 5 · 3
		=	5 · 3	+	5 · 2
3	25	=	7 · 3	+	25 – 7 · 3
		=	7 · 3	+	2 · 2

Tabelle 2: Mögliche Kombinationen an Vielfachen von 3 und 2, um 25 additiv zu erreichen.

Tabelle 2 zeigt eine zu den Überlegungen am Zahlenstrahl passende Berechnung. Die Summe 25 ergibt sich aus dem linken und rechten Abschnitt beim jeweiligen Treffpunkt, einem ungeraden Vielfachen von 3 zwischen 0 und 25. Die Zahlen dieser Treffpunkte müssen ungerade sein, da diese sonst von der ungeraden Zahl 25 aus nicht in 2er-Schritten erreichbar wären.

Warum Drobisch den Term 6z+3 ansetzt, bleibt aufgrund fehlender weiterer Ausführungen unklar. Von Bedeutung ist, dass die von Cassirer / Drobisch fokussierte konkrete Allgemeinheit auch passenden graphischen Darstellungen zukommt, wodurch diese so nützlich werden. Die Symbolsprache der Algebra wird erst nach der Grundschulzeit eingeführt. Anhand graphischer Darstellungen kann gleichwohl in jungen Jahren mathematisches Denken entwickelt und gefördert werden, das sich mit regelhaften (algebraisch-arithmetischen) Zusammenhängen befasst. Dazu aber müsste die Verwendung graphischer Darstellungen im Mathematikunterricht der Grundschule noch umfassender und systematischer betrieben werden. Graphische Darstellungen sind weder Selbstzweck noch Sackgassen, sondern – und dazu trägt die Einsicht in das Phänomen der konkreten Allgemeinheit bei – wirkungsvolle Mittel, um Kinder in der Entwicklung ihrer mathematischen Fähigkeiten, darunter ganz prominent das Problemlösen, erfolgreich zu unterstützen.

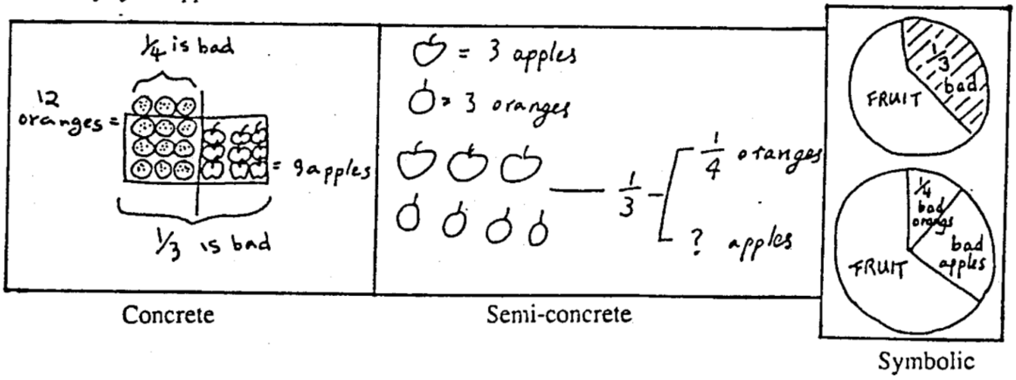
6. SCHLUSSBETRACHTUNG

Dem Review ist ein wichtiger Hinweis zu verdanken auf „Textaufgaben grafisch darstellen“ (Ott, 2016). Dort wird Bezug genommen auf eine Studie von Veloo & Lopez Real (1994). Zu zwei der besprochenen Aufgaben folgen Visualisierungsvorschläge (Abb. 12, 13). Anders als bei dem gesetzten Fokus auf „Stages in diagram development“ (ebd., S. 673) von „Concrete“, „Semi-concrete“ bis „Symbolic“ (ebd. S. 670) ist uns dabei wichtig, dass sich anhand der graphischen Darstellungen der (arithmetischen) Bedeutungszusammenhänge tatsächlich Problemlösungen offenbaren können.

Im *Problem 3* sind die Anzahlen von zwei Obstsorten bekannt sowie der Anteil der unter ihnen insgesamt angefaulten Obststücke. Des Weiteren ist der Anteil an angefaulten Obststücken der einen Sorte bekannt. Ermittelt werden soll die Anzahl an angefaulten Obststücken der anderen Obstsorte (Abb. 12). Im *Problem 8* ist eine Klassengröße zu ermitteln, wobei der Anteil der Mädchen bekannt ist (3/5) und je eine bestimmte Veränderung der Anzahl der Mädchen (Erhöhung um 6) und der Anzahl der Jungen (Verdopplung) zu gleich vielen Mädchen wie Jungen führen würde (Abb. 13).

Problem 3: *A box contains 12 oranges and 9 apples. One-third of all the fruits is bad. If 1/4 of the oranges are bad, how many of the apples are bad?*

Figure 4



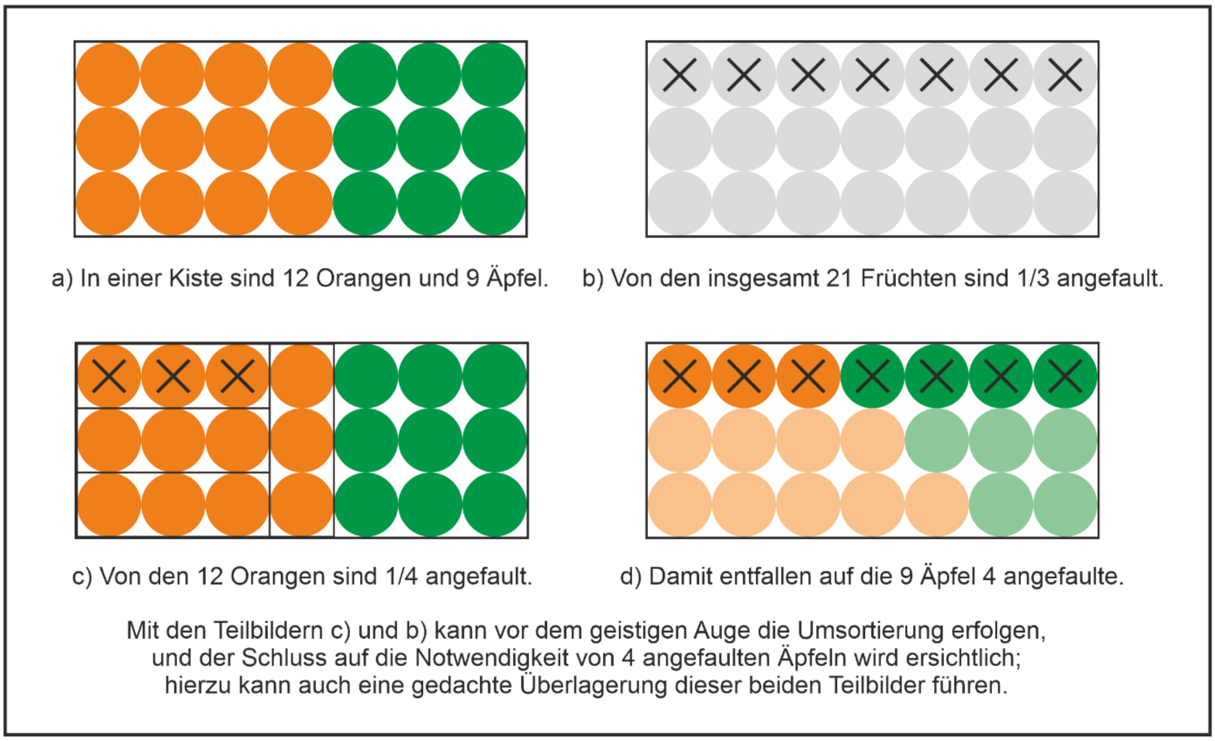
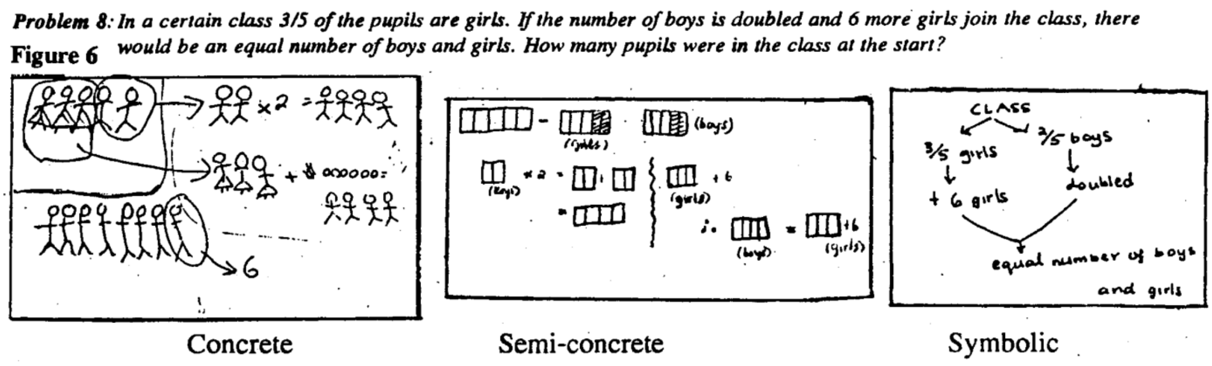


Abbildung 12: Graphische Erschließung zur Anzahl einer von zwei Obstsorten mit bestimmten Eigenschaften, gegeben im Problem 3, dies im Vergleich zur Figure 4 (Venloo & Real Lopez, 1994, S. 670).



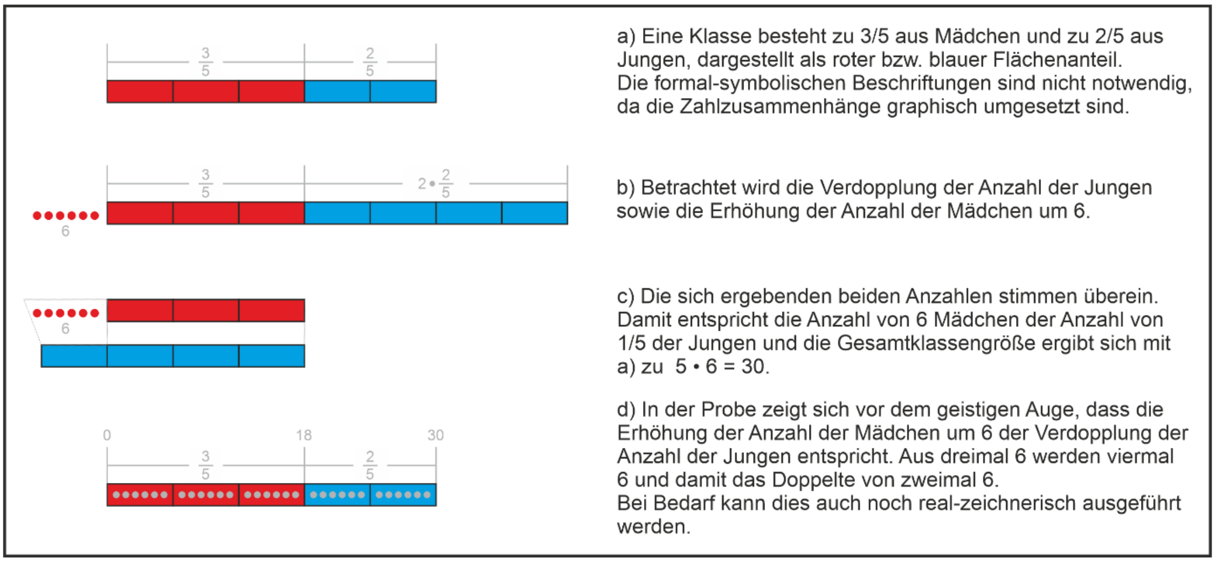


Abbildung 13: Graphische Ermittlung der Anzahl einer Klassengröße anhand von bestimmten Vorgaben, gegeben im Problem 8, dies im Vergleich zur Figure 6 (Venloo & Real Lopez, 1994, S. 671).

Der Vergleich der beiden Visualisierungsvorschläge mit den jeweiligen Schülereigenproduktionen zeigt wichtige Nachholbedarfe, nämlich der Wertschätzung und Unterrichtung des Einsatzes und des Umgangs mit graphischen Darstellungen: Graphische Darstellungen sind nutzbar als *Ausdrucksformen* zur *Erhellung* und *Klärung* von Sachverhalten.

Literatur

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C. & Schweden, K.-W. (2016). *Zahlenzauber 1*. Allgemeine Ausgabe. Berlin: Cornelsen.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C. & Schweden, K.-W. (2017a). *Zahlenzauber 3*. Allgemeine Ausgabe. Berlin: Cornelsen.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C. & Schweden, K.-W. (2017b). *Zahlenzauber 4*. Allgemeine Ausgabe. Berlin: Cornelsen.

Betz, B., Bezold, A., Dolenc-Petz, R., Gasteiger, H., Hölz, C., Ihn-Huber, P., Kullen, C., Plankl, E., Pütz, B., Schraml, C. & Schweden, K.-W. (2020). *Zahlenzauber 2*. Allgemeine Ausgabe. Berlin: Cornelsen.

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), 1–15.

Cassirer, E. (1910). *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über Grundfragen der Erkenntniskritik*. Berlin: Verlag von Bruner Cassirer.

Drobisch, M. W. (1887). *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft* (5. Aufl.). Hamburg / Leipzig: Verlag von Leopold Voss.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2001). Die Wissensform des Formelwissens. In W. Weiser, W. & B. Wollring (Hrsg.), *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe* (S. 83–98). Hamburg: Dr. Kovač.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77–115). Berlin / Heidelberg: Springer Spektrum.

Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen – Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Münster: Waxmann.

Pólya, G. (1957). *How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method.* 2nd Edition, Doubleday Anchor Books.

Rott, B. (2018). Empirische Zugänge zu Heurismen und geistiger Beweglichkeit in den Problemlöseprozessen von Fünft- und Sechstklässlern. *mathematica didactica*, 41/1, 47–75.

Schwank, I. (2018). *Kinder in ihrem mathematischen Talent wertschätzen – Olympische Aufgabensammlung* (3. erw. Aufl.). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Van der Waerden, B. L. (1954). Denken ohne Sprache. In G. Révész (Hrsg.), *Thinking and speaking* (S. 165–174). Amsterdam: North-Holland.

Veloo, P. K. & Lopez Real, F. (1994). Drawing Diagrams and Solving Word Problems: A Study of a Sample of Bruneian Primary and Secondary School Children. In G. Bell, B. Wright, N. Lesson & J. Geake (Eds.), *Challenges in Mathematics Education: Constraints on Construction.* Proceedings of the 17th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia). (pp. 667-674), Lismore: MERGA.

Zweig, K. (2019). *Ein Algorithmus hat kein Taktgefühl* (5. Aufl.). München: Wilhelm Heyne.