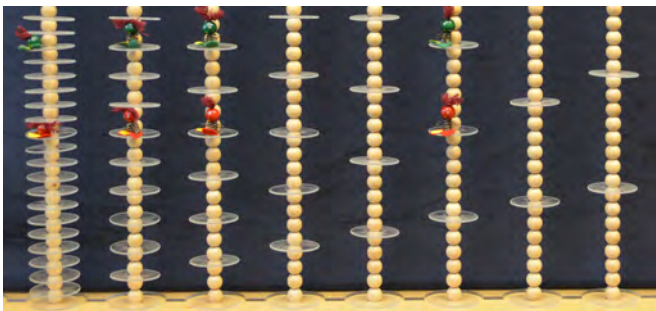


Gemeinsame Teiler

Zwei Wichte wohnen in zwei unterschiedlichen Treppenhäusern auf Etagen unterschiedlicher Höhe. Nun wollen sie in ein gemeinsames Treppenhaus umziehen, dabei aber unbedingt ihre Ausgangshöhen beibehalten. Offenkundig bietet das 1er-Treppenhaus eine solche Möglichkeit. Jede Zahl ist ein Vielfaches von 1. 1 ist Teiler jeder Zahl, also auch gemeinsamer Teiler – tatsächlich der kleinste – aller Zahlen.

Die Wichte überlegen nun, ob es noch eine bessere Möglichkeit gibt, als in das 1er-Treppenhaus umzuziehen. Sie stören sich an den vielen kleinschrittigen Etagenwechseln bei ihren gegenseitigen Besuchen.

Nehmen wir an, ein grüner Wicht wäre ursprünglich im 2er-Treppenhaus auf der Etage in Höhe 18 eingezogen, ein roter Wicht im 3er-Treppenhaus auf Höhe 12. Dann können beide als einfache Lösung gemeinsam in das 1er-Treppenhaus umziehen.



Eine weitere Suche offenbart, dass sie unter Beibehalt ihrer Höhe auch gemeinsam in das 2er-, 3er- und sogar 6er-Treppenhaus umziehen können. 12 ist wie 18 Vielfaches von 2 und 3; 2 ist wie 3 auch Teiler von 12 und 18. Im 6er-Treppenhaus wohnen die beiden Wichte in unmittelbar aufeinander folgenden Etagen. Besser geht es nicht. Der Höhenunterschied der beiden Etagen ist 6. 18 ist wie 12 Vielfaches von 6, 6 ist der größte gemeinsame Teiler von 12 und 18.

Die Überlegungen können fortgeführt werden, indem z.B. ein blauer Wicht hinzukommt, der zunächst im 7er-Treppenhaus auf der Etage in Höhe 21 oder gar in Höhe 7 wohnt. Manche Höhen erweisen sich als sperrig. Es gibt Höhen, die außer im 1er-Treppenhaus nur in genau einem anderen Treppenhaus vorkommen, diese Höhen sind Zahlen, die nur 1 und sich selbst zum Teiler haben. Es handelt sich um die Primzahlen.

Ausblick für besonders Interessierte

Quadratzahlen sind diejenigen Zahlen, die sich ergeben, wenn eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird, z.B. $0=0\cdot 0$, $1=1\cdot 1$, $4=2\cdot 2$, $9=3\cdot 3$, $16=4\cdot 4$, ...

Im Zahlen-Hochhaus können sie aufgesucht werden, indem die Wichte in ihrem jeweiligen Treppenhaus so oft nach oben hüpfen, wie es ihrer jeweiligen Hüpfhöhe pro individuellem Hüpf (Perlenabstand zwischen zwei Plattformen) entspricht.



Zwei Wichte, die in benachbarten Treppenhäusern auf ihren jeweiligen Quadratzahlhöhen stehen, können leicht einen Ort finden, um eine Party zu feiern. Derjenige, der tiefer steht, macht dazu einen Hüpf nach oben, derjenige, der höher steht, einen Hüpf nach unten. Z.B. gelangt so der 2er-Wicht von $4=2\cdot 2$ auf $6=3\cdot 2$ und der 3er-Wicht von $9=3\cdot 3$ auf $6=2\cdot 3$. Es stellt sich heraus, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen eine ungerade Zahl ist: Er setzt sich zusammen als Summe aus den beiden sich um 1 unterscheidenden Hüpfhöhen bis zum dazwischen liegenden Party-Ort. Tatsächlich nimmt der Abstand von einer Quadratzahl zur nächsten fortwährend um 2 zu. Beide Teilabstände bis zum dazwischen liegenden Party-Ort vergrößern sich jeweils um 1. Der Weg bis zu einer Quadratzahl kann also statt eines Quadrierens auch so beschrieben werden: $1+(1+2)+(2+3)+(3+4)+\dots$ oder auch $1+3+5+7+\dots$

Ein einzelner Wicht kann so, beginnend im 1er-Treppenhaus, durch fortgesetzte Additionen alle Quadratzahlen einfach aufsuchen, wobei er zwischendurch die beschriebenen Party-Orte zum Wechsel ins jeweils nächste Treppenhaus ausnutzt. Das Ergebnis dieses Zurechtlegens hilft bei der Beantwortung folgender weiterführender Frage: Ist es möglich, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen seinerseits eine Quadratzahl ist? Offenkundig ja: es gibt sogar unendlich viele Möglichkeiten, da sich aus jeder ungeraden Zahl durch Quadrieren eine neue ungerade Quadratzahl herstellen lässt.

Konzeption Zahlen-Hochhaus und Flyer: Inge Schwank
Mitwirkung am Flyer (Text/Fotos): Jule Janßen & Alla Vlasenko



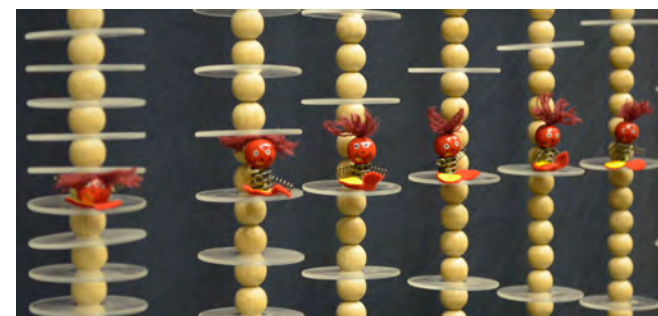
Treffpunkt

»Mathematische Frühförderung«

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Inge Schwank

Gemeinsam getragen
vom Institut für Kognitive Mathematik der Universität Osnabrück
sowie vom Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V.

Zahlen- Hochhaus



Mathematische Spielwelt
zur Erforschung von Zahlen
in ihren
multiplikativen Zusammenhängen

Besonderer Dank gilt der Stiftung
Stahlwerk Georgsmarienhütte als
Hauptförderer des M^2 -Treffpunkts
»Mathematische Frühförderung«.



Der Aufbau

Zahlen sind hinsichtlich ihrer multiplikativen Zusammenhänge interessant. Das Zahlen-Hochhaus ist eine Mathematische Spielwelt, mit der diese untersucht werden können. Es besteht aus sogenannten Treppenhäusern, die passend zu den Multiplikations-Reihen aufgebaut sind.



Im Anfangstreppehaus, welches die Reihe

$0 \cdot 0, 1 \cdot 0, 2 \cdot 0, \dots$

repräsentiert, gibt es keine Perlen, sondern lediglich eine Plattform ganz unten. Ein Aufstieg ist hier nicht möglich. Es folgen die Treppenhäuser für die Reihen

$0 \cdot 1, 1 \cdot 1, 2 \cdot 1, \dots$ bis $0 \cdot 10, 1 \cdot 10, 2 \cdot 10, \dots$

Jedes von ihnen besteht aus 100 Perlen, die durch die eingesetzten Plattformen jeweils eine bestimmte multiplikative Struktur erhalten. Mit den Plattformen sind die in den Treppenhäusern erreichbaren Etagen festgelegt. Ihre Abstände passen genau zu den jeweiligen Multiplikations-Reihen. Wie das Anfangstreppehaus beginnt auch jedes der weiteren Treppenhäuser mit einer untersten Plattform in Höhe 0.

Wichte und ihre Partys

Im Zahlen-Hochhaus leben smarte Wichte. Sie interessieren sich dafür, in welchen Höhen sie in den unterschiedlichen Treppenhäusern Etagen beziehen können.

Gelegentlich markiert ein Wicht einen seiner Zahlenschuhe, um anzuzeigen, in genau welchem Treppenhause er zu Hause sein möchte. Der abgebildete Wicht ist auf einer Etage im Treppenhause der 4er-Reihe eingezogen.



Er macht dies kenntlich durch die Beschriftung seines einen Schuhs mit 4 und ist damit ein 4er-Wicht geworden. Beginnend mit der untersten Etage des 4er-Treppenhauses, seinem Erdgeschoss, kann der 4er-Wicht zu weiteren 4er-Etagen hochhüpfen. Zu Beginn ist er $0 \cdot 4$ Perlen hochgehüpft, er befindet sich also auf der Etage in Höhe 0. Hüpfert er nun $1 \cdot 4$ Perlen hoch, erreicht er die Etage in Höhe 4. Hüpfert er nochmal $1 \cdot 4$ Perlen hoch, also insgesamt $2 \cdot 4$ Perlen, erreicht er die Etage in Höhe 8, usw.

Wichte mit unbeschrifteten Zahlenschuhen legen sich nicht auf ein Treppenhause fest. Sie interessieren sich dafür, von einem Treppenhause in ein anderes zu gelangen. Ein solcher Wechsel ist möglich, wenn sich Etagen in verschiedenen Treppenhäusern auf gleicher Höhe befinden. Z.B. kann von einem Erdgeschoss aus in jedes der anderen Erdgeschosse gewechselt werden, auch in dasjenige im 0er-Treppenhause. Egal in welchem Treppenhause sich ein Wicht in welcher Etage befindet, kann er immer in eine Etage gleicher Höhe im 1er-Treppenhause wechseln! Durch die wiederholte Addition von 1 sind alle Zahlen erreichbar. Andere Wechselmöglichkeiten sind durch weitere Überlegungen erschließbar.

Die Wichte feiern gerne Partys. Partys sind für solche Wichte möglich, die sich zwar in unterschiedlichen Treppenhäusern befinden, dort aber auf Etagen in gleicher Höhe eingezogen sind. Bedingt durch die Struktur des Zahlen-Hochhauses, d.h. dem Aufbau der Zahlen, fallen die Partys manchmal kleiner, manchmal größer aus. Der 1er-Wicht ist immer dabei. Im Erdgeschoss können alle mitmachen, sogar der 0er-Wicht.

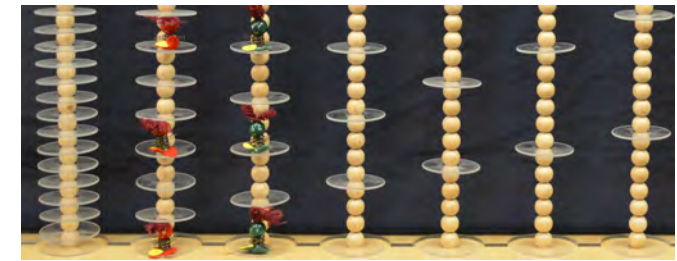
Spielmöglichkeiten

Die Beschäftigung mit den Interessen der smarten Wichte im Zahlen-Hochhaus fördert die Entwicklung des Zahlenverständnisses, insofern neue Bezüge zwischen den Zahlen ausgemacht und untersucht werden können.

Zahlen können im Zusammenhang einer Multiplikation oder Division stehen, sie können Vielfache und Teiler sein, Primzahlen, Quadratzahlen und vieles mehr. Eine Zahl ist nicht nur Vielfaches oder Teiler von sich selbst, sondern kann auch ein gemeinsames Vielfaches oder ein gemeinsamer Teiler von mehreren Zahlen sein, insbesondere gibt es kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) und größte gemeinsame Teiler (ggT).

Gemeinsame Vielfache

Auf welchen Etagen können der 2er-Wicht und der 3er-Wicht eine Party feiern? Hüpfen die beiden Wichte in ihren Treppenhäusern hoch, stellen sie fest, dass sie sich nur ab und an auf einer Etage in derselben Höhe begegnen. Diese Höhen sind 0, 6, 12, 18, ... nicht aber 2, 4, 8, 10, ... oder auch nicht 3, 9, 15, 21, ...



Bei ihren Party-Höhen handelt es sich um die gemeinsamen Vielfachen von 2 und 3, z.B. $6=3 \cdot 2$ bzw. $6=2 \cdot 3$ oder $12=6 \cdot 2$ bzw. $12=4 \cdot 3$. Es gibt unbegrenzt viele Möglichkeiten für die beiden, eine Party zu feiern, wenn die Treppenhäuser beliebig weit nach oben ausgebaut werden. Die vom Erdgeschoss abgesehen erste Möglichkeit für sie, eine Party zu feiern, ist auf der Etage in Höhe 6. Diese Höhe ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 2 und 3. Von dort aus geht es für die beiden Wichte mit ihren Hüpfbegegnungen so wie ursprünglich vom Erdgeschoss aus weiter, so dass eine nächste Party-Höhe nach einer weiteren Höhenveränderung um 6 erwartet werden kann usw. Die Überlegungen können weitergeführt werden, indem z.B. versucht wird, weitere Wichte aus anderen Treppenhäusern an einer Party zu beteiligen, und Ausschau nach dafür geeigneten Etagen gehalten wird.