

# PROBLEM POSING – ERGEBNISSE EINER EMPIRISCHEN ANALYSE ZUM PROZESS DES STRUKTURIERTEN AUFWERFENS MATHEMATISCHER PROBLEME

Lukas Baumanns & Benjamin Rott

Universität zu Köln

*Der vorliegende Beitrag befasst sich mit der Tätigkeit des Aufwerfens mathematischer Probleme, dem sogenannten Problem Posing. Im Rahmen einer Pilotstudie wurden 13 Problem-Posing-Prozesse bei 5 Studierenden und einem Mathematiker beobachtet und analysiert. Dabei wurden die Proband\*innen zum strukturierten Problem Posing aufgefordert, bei dem neue Probleme auf der Grundlage eines zuvor gelösten Initialproblems aufgeworfen werden sollen. Ziel dieser Untersuchung war die Identifikation und inhaltliche Beschreibung wiederkehrender Phasen beim Prozess des Problem Posings. Erste Ergebnisse lassen fünf solcher Phasen erkennen, die zum Teil an die Phasen des Problemlöseprozesses erinnern. Darüber hinaus wurden Episoden beobachtet, die bislang in den theoretischen Modellen des Problemlösens und Problem Posings unberücksichtigt geblieben sind. Daran anknüpfend wurden die prozessualen Muster der beobachteten Prozesse in einem deskriptiven Prozessmodell synthetisiert.*

## Einleitung

„Allerdings kommt es auf die Problemstellung häufig mehr an als auf die eigentliche Lösung [...]. Das Anschneiden neuer Fragen, die Erschließung neuer Möglichkeiten, das Aufrollen alter Probleme von einer anderen Seite her – das sind die Aufgaben für einen schöpferischen Geist, das ist der wahre wissenschaftliche Fortschritt.“ (Einstein & Infeld, 1995, S. 103 f.)

Das Aufwerfen mathematischer Probleme ist sowohl für Fachmathematiker\*innen bei der Suche nach Forschungsanlässen als auch für Mathematiklehrer\*innen beim Erstellen und Variieren von Aufgaben eine zentrale Tätigkeit. Gleichwohl wird diesem sogenannten *Problem Posing* in der unterrichtlichen Praxis sowie in der empirischen Forschung ein – in Relation zu anderen Themen – vergleichsweise geringer Platz eingeräumt. Insbesondere fehlen gesicherte Erkenntnisse, ob bei dieser Tätigkeit bestimmte, immer wiederkehrende Phasen durchlaufen werden bzw. beobachtet werden können. Entsprechende normative bzw. deskriptive Prozessmodelle<sup>1</sup> sind für das Problemlösen (*problem solving*) bereits etabliert (z. B. Pólya, 1949; Schoenfeld, 1985, Kap. 9); für das Problem Posing gibt es bislang kein allgemein

---

<sup>1</sup> Ein deskriptives Prozessmodell dient Forscher\*innen und Lehrkräften zur Beschreibung und der Analyse von Problem-Posing-Prozessen, während normative Modelle Verläufe vorgeben bzw. als idealisierte Abläufe dazu dienen sollen, das Aufstellen von Problemen gezielt anzuleiten.

akzeptiertes Modell. Jedoch kann ein solches Phasenmodell der Diagnose von Denkprozessen bei Schüler\*innen dienlich sein. Im Rahmen einer qualitativen Studie wurde der Versuch unternommen, aus theoretischer und empirischer Perspektive einen Einblick in den Prozess des strukturierten Problem Posings zu erlangen. Dabei wurde das Ziel verfolgt, Phasen beim Aufwerfen von Problem zu identifizieren, um hypothesengenerierend ein deskriptives Prozessmodell des strukturierten Problem Posings zu entwickeln.

## Theoretischer Hintergrund

Der Begriff des *Problem Posings* wurde aus unterschiedlichen Perspektiven definiert. Als Arbeitsbegriff liegt der hier vorgestellten Untersuchung das Verständnis Silvers (1994, S. 19) zugrunde, der unter dieser Tätigkeit die *Generierung neuer* sowie die *Reformulierung gegebener* mathematischer Probleme versteht. Beide Aspekte unterscheiden sich qualitativ bzw. können als Enden einer Skala aufgefasst werden: Bei der Generierung geht es um das Stellen neuer Probleme ohne Anlehnung an vorhandene Aufgaben, während bei einer Reformulierung oder Aufgabenvariation (vgl. Schupp, 2002) vorhandene Aufgaben (mehr oder weniger stark) verändert und auf diese Weise neue Aufgaben geschaffen werden. Die Grenzen sind hierbei fließend, aber Extremfälle sind klar erkennbar.

Dass der englische Begriff *problem* in der Fachliteratur nicht allein mit *Problemlöseaufgabe*, sondern auch mit *Routineaufgabe* übersetzt werden kann, hat zur Folge, dass auch bei dem Begriff des *Problem Posings* nur unzureichend zwischen dem Aufwerfen von Problemlöse- und Routineaufgaben unterschieden wird. Dabei könnte eine solche terminologische Differenzierung dem vielfach geäußerten Vorschlag folgen, zwischen *problems* als Problemen und *routine tasks* als Routineaufgaben zu unterscheiden (Pehkonen, 2004, S. 55; Schoenfeld, 1985, S. 74). Im Rahmen dieses Beitrags soll der Begriff *Routine Task Posing* eingeführt werden, mit dem das Aufwerfen von Routineaufgaben bezeichnet wird. Mit *Problem Posing* wird hingegen explizit das Aufwerfen mathematischer Probleme bezeichnet. Eine solche Unterscheidung findet in der Forschungsliteratur bislang nicht statt. Dieser Beitrag fokussiert das Stellen von Nicht-Routineaufgaben.

Unter den Bestrebungen, Problem-Posing-Situationen zu kategorisieren, findet insb. die Taxonomie von Stoyanova und Ellerton (1996, S. 519 f.) häufige Verwendung. Die Autoren unterscheiden Problem-Posing-Situationen je nach Grad der Strukturiertheit der Vorgaben zwischen *freien*, *semi-strukturierten* und *strukturierten* Aufgaben. Unter *freiem* Problem Posing verstehen sie die Entwicklung von Problemen aus einer gegebenen, konstruierten

oder natürlichen Situation heraus; ein Beispiel ist die folgende Aufforderung: *10 Mädchen und 10 Jungs stehen in einer Schlange. Formuliere möglichst viele unterschiedliche und lösbare Probleme zu dieser Information* (Van Harpen & Sriraman, 2013, S. 207). Problem Posing wird als *semi-strukturiert* verstanden, wenn die Strukturen der Situation erfasst und Vorwissen, Fähigkeiten und Konzepte des mathematischen Inhalts aktiviert werden müssen. Die Abbildung eines beliebigen Dreiecks, in das sein Inkreis einbeschrieben ist, mit der Aufforderung, möglichst viele unterschiedliche und lösbare Probleme zu dieser Darstellung zu formulieren, bedarf einer solchen Aktivierung des mathematischen Wissens im Hinblick auf (In-)Kreise, Mittelsenkrechte, Dreiecke, Flächeninhalte u. v. a. (ebd., S. 207 f.). Als *strukturiert* werden in dieser Typologie Situationen bezeichnet, die auf einem bereits vorhandenen und zu lösenden Initialproblem basieren. Die Tätigkeit des strukturierten Problem Posings beginnt nach der Lösung des Initialproblems mit der Aufforderung, möglichst viele sinnvolle, mathematische und lösbare Aufgaben in Bezug zum Initialproblem aufzuwerfen. Vergleichen wir diese Kategorisierung mit dem oben dargestellten Definitionsangebot Silvers (1994, S. 19), beschreiben das freie und semi-strukturierte Problem Posing die Generierung neuer Probleme und das strukturierte Problem Posing die Reformulierung gegebener Probleme.

Als eine Form des strukturierten Problem Posings ist in der deutschsprachigen Forschungsliteratur vor allem Schupps (2002) Konzept der *Aufgabenvariation* bekannt. Vergleichbar zu den Heuristiken des Problemlösens hat Schupp (vgl. ebd., S. 31 ff.) 24 verschiedene Strategien zusammengestellt, die dazu dienen, die zumeist unbekannte Tätigkeit des Problem Posings zu lenken und selbstregulative respektive metakognitive Reflexionen anzuregen, um einen möglichst lernwirksamen Einsatz von Aufgabenvariationen zu gewähren.

## **Forschungsstand**

Im Vergleich zur Problemlöseforschung ist die Problem-Posing-Forschung „a relatively new endeavor“ (Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015, S. 4). Erste Veröffentlichungen, die sich ausschließlich dem Problem Posing zuwenden, finden sich vor allem in den 1980er-Jahren bei Brown und Walter (1983), Ellerton (1986) und Kilpatrick (1987). In der deutschsprachigen Forschungsliteratur greift Kießwetter (1985, S. 302) das Finden von Anschlussproblemen in seinem Hamburger Modell zur Förderung mathematisch begabter Schüler\*innen als Kennzeichen besonderer Begabung auf. Dennoch wird bis in die späten 1990er-Jahre eine mangelnde Aufmerksamkeit der mathematikdidaktischen Forschung konstatiert (English, 1997, S. 184). Diese Problematik spiegelt sich auch in aktuellen Publikationen wider. So schreiben

Singer, Ellerton und Cai (2013), „[s]cholars have recognized that problem posing is an important part of mathematical activity, yet research on problem posing has not been a major focus in mainstream mathematics education research“ und „[a]t present, the field of problem posing is still very diverse and lacks definition and structure“ (S. 4).

Im Folgenden sollen die bisherigen Erkenntnisse über den Zusammenhang zwischen Problem Posing und Problemlösen ausgeführt werden. Schon aus einer theoretischen Perspektive wird beiden Tätigkeiten eine große Nähe zugeschrieben (Silver, 1995; Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman, 2012; Leong, Tay, Toh, Quek & Dindyal, 2011; Dickman, 2014). Silver und Cai (1996) haben die Problemlöse- und Problem-Posing-Fähigkeiten mithilfe wenig verwandter Aufgaben bei 500 Mittelstufenschüler\*innen quantitativ analysiert. Neben einer Bekräftigung für Kilpatrick's (1987) theoretischen Argumente, dass die Qualität aufgeworfener Probleme ein Indikator für die Problemlösefähigkeiten von Personen ist, stellten sie außerdem eine hohe Korrelation zwischen beiden Tätigkeiten fest. Cai und Hwang (2002), die einander ähnlichere Problemlöse- und Problem-Posing-Aufgaben verwendeten, konstatierten diesen Zusammenhang bei chinesischen Schüler\*innen ausgeprägter als bei amerikanischen Schüler\*innen.

Mit der Frage „What Do We Know About the Cognitive Processes of Problem Posing?“ (2015, S. 11) fokussieren Cai et al. die prozessuale Perspektive auf Problem Posing innerhalb aktueller Forschungsbestrebungen und konstatieren unter Sichtung des Forschungsstands, dass das Wissen über kognitive Prozesse während des Aufstellens von Problemen äußerst gering ist. Ellerton, Singer und Cai (2015, S. 555) sehen in diesem Desiderat einen fruchtbaren Untersuchungsgegenstand. Im Hinblick auf die Existenz eines Phasenmodells für das Problem Posing halten Cai et al. fest: „[T]here is not yet a general problem-posing analogue to well-established general frameworks for problem solving such as Polya's (1957) four steps“ (2015, S. 14).

### **Forschungsdesign**

In der vorliegenden Untersuchung wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit und Handhabbarkeit der Studie ausschließlich strukturierte Problem-Posing-Situationen (Stoyanova & Ellerton, 1996, S. 519 f.) untersucht. Es ist zudem davon auszugehen, dass strukturiertes Problem Posing in der Praxis von Lehrer\*innen bei der Variation von Aufgaben sowie Fachmathematiker\*innen bei der Exploration vorhandener Probleme die größte Relevanz der drei Situationen besitzt.

Vor dem Hintergrund des dargestellten Forschungsstands zur Existenz und Notwendigkeit eines Phasenmodells des Problem Posings haben sich für diese Untersuchung die folgenden Forschungsfragen gestellt:

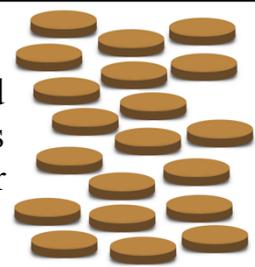
1. Inwieweit lassen sich beim Prozess des strukturierten Problem Posings Phasen identifizieren?
2. Lässt sich aus den beobachteten Prozessen ein vorläufiges deskriptives Prozessmodell des strukturierten Problem Posings generieren?

Um diesen Fragen nachzugehen, wurden Proband\*innen zum Problem Posing aufgefordert. Um die kognitiven Prozesse der Proband\*innen erfassen zu können, geschah das Problem Posing im Rahmen von aufgabenzentrierten Interviews mit Anregung zum Lauten Denken (Hussy, Schreier & Echterhof, 2013, S. 236), das vor allem in der Problemlöseforschung fruchtbare Verwendung gefunden hat (Konrad, 2010, S. 482). Bei aufgabenzentrierten Interviews interagiert der Interviewte nicht allein mit dem Interviewer, sondern im Besonderen mit einer Aufgabenumgebung, die speziell für die Erreichung des Forschungsziels entwickelt wird (Maher & Sigley, 2014, S. 579).

Da das Laute Denken insbesondere dann erkenntnisreich ist, wenn die Proband\*innen zur Selbstreflexion in der Lage sind (Konrad, 2010, S. 487) und die Tätigkeit des Problem Posings gerade für Schüler\*innen zumeist unvertraut ist, wurden für die aufgabenzentrierten Interviews erwachsene Proband\*innen ausgewählt. Fünf Lehramtsstudierende im Master und ein forschender und lehrender Diplom-Mathematiker standen für einstündige Interviews zur Verfügung. Es wurden vier mathematische Probleme ausgewählt, die aufgrund des Schwierigkeitsgrades und des Variationspotenzials als besonders geeignet eingeschätzt wurden. Von diesen vier Aufgaben wurden zwei Aufgaben sowohl den Studierenden als auch dem Fachmathematiker nahezu identisch gestellt. Außerdem wurde für die Studierenden sowie den Fachmathematiker eine separate Zusatzaufgabe vorbereitet, falls die Zeit noch eine weitere Bearbeitung zugelassen hätte. Daraus entstanden 13 beobachtete Prozesse innerhalb von rund 6 Stunden Videomaterial. Die Aufgabe *NIM-Spiel* (Schupp, 2002, S. 92 ff.) wurde allen Proband\*innen gestellt und wird im Folgenden vorgestellt:

### **NIM-Spiel**

Auf dem Tisch liegen 20 Spielsteine. Zwei Spieler A und B nehmen abwechselnd einen oder zwei Steine weg. Es gewinnt, wer den letzten Zug macht. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?



Entfernt Spieler A im ersten Zug zwei Spielsteine vom Tisch, sodass für Spieler B 18 Spielsteine liegen bleiben, kann er folgende Strategie verfolgen: Spieler A gleicht die Züge von Spieler B derart aus, dass nach jeweils zwei Zügen genau drei Steine entfernt wurden. So bleiben für Spieler B zunächst 15, dann 12, 9, 6 und schließlich 3 Spielsteine liegen. Nun kann Spieler B einen oder zwei Spielsteine entfernen und somit zwei oder einen Spielstein für Spieler A zurücklassen; Spieler A kann in jedem Fall den Tisch abräumen und das Spiel gewinnen. Diese, eigentlich für Schüler\*innen entwickelte, Aufgabe eignet sich unter anderem deshalb auch für Studierende und Mathematiker\*innen zum Problemlösen und -aufstellen, weil sich bei hinreichender Variation „die Aufgabenschwierigkeit fast beliebig steigern“ (ebd., S. 95) lässt. Außerdem eignen sich gerade Spiele für Aufgabenvariationen, da mit den vorhandenen Spielregeln Problembedingungen gegeben sind, die in besonderer Weise zur Variation einladen. In Tabelle 1 auf der folgenden Seite sind einige mögliche Variationen des NIM-Spiels tabellarisch unter Verwendung der Strategien von Schupp (2002, S. 31 ff.) dargestellt. Die Variationsvorschläge (ebd., S. 92 ff.) sind nicht erschöpfend, sondern dienen allein der Demonstration des Variationspotenzials der Aufgabe.

Dieses sowie jedes andere gestellte Problem sollte zunächst von den Proband\*innen gelöst werden, bevor anschließend der Auftrag gestellt wurde, weitere sinnvolle, mathematische und lösbare Probleme auf der Grundlage dieses Initialproblems aufzuwerfen. Für die Prozessauswertung wurde die von Rott (2014) angepasste *Verbal Protocol Analysis* Schoenfelds (1985) für Problem-Posing-Prozesse adaptiert. Bei diesem Vorgehen, das ohne Transkription anhand des Videomaterials erfolgen kann (Rott, 2014, S. 267), wird in einem ersten Analyseschritt jeder Prozess in zeitliche Abschnitte – sogenannte Episoden – unterteilt, die Schoenfeld als „macroscopic chunks of consistent behavior“ (1985, S. 292) umschreibt. In diesen Episoden gehen Personen konsistent einem Ziel nach. Erst in einer weiteren analytischen Durchsicht werden Episodentypen herausgestellt und inhaltlich beschrieben. Aufgrund des geringen Wissens um Episodentypen beim Problem Posing und der in der Forschung angenommenen Nähe dieses Prozesses zum Problemlösen (Silver, 1995; Kontorovich et al., 2012, S. 152) wurden bei den Beschreibungen der Episodentypen Parallelen zu den jeweiligen Episodentypen des Problemlöseprozesses (Pólya, 1949; Schoenfeld, 1985) gezogen sowie auf Unterschiede hingewiesen. Um sich der Beantwortung der zweiten Forschungsfrage zu nähern, wurden die beobachteten Prozesse im Hinblick auf wiederkehrende prozessuale Muster analysiert, um diese Erkenntnisse mit dem Wissen über Phasenmodelle des Problemlösens zu synthetisieren und Hypothesen für ein mögliches deskriptives Prozessmodell des strukturierten Problem Posings zu generieren.

Strategie	Variation
Geringfügig ändern	Kann Spieler A bei 21 oder 19 Startspielsteinen sicher gewinnen?
Verallgemeinern	Kann Spieler A bei $n$ Startspielsteinen sicher gewinnen?
Umkehren	Der Tisch ist zu Beginn leer und es gewinnt derjenige Spieler, der den 20. Stein ablegen kann. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?
Ziel ändern	Wer den Tisch abräumt, verliert. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?
Kombinieren	Wer bei $n$ Startspielsteinen den Tisch abräumt, verliert. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?
Analogisieren	Man muss 1, 2 oder 3 (1 oder 3 bzw. 2 oder 3) Steine entfernen. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?
Verallgemeinern	Es gibt $n$ Startspielsteine und abwechselnd werden $x$ oder $y$ (mit $y \geq x > 0$ ) Steine entfernt. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?
Bedingungen ändern	Kann Spieler A sicher gewinnen, wenn er nicht nur gegen Spieler B, sondern auch gegen einen dritten Spieler C spielt?
Verallgemeinern	Es gibt $n$ Startspielsteine und man muss 1 bis $m$ (mit $m < n$ ) Spielsteine entfernen. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?
Variation variieren	Es gibt $n$ Startspielsteine und man muss 1 bis $m$ (mit $m < n$ ) Spielsteinen entfernen, wobei $m$ nicht mehr konstant, sondern höchstens gleich der Hälfte der verbliebenen Steine ist. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?
Bedingungen ändern	Die 20 Startspielsteine werden auf zwei Haufen verteilt. In einem Zug darf man nur von einem Haufen Steine entfernen. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?
Kombinieren	Wie die vorige Variation nur mit drei Spielern und einer veränderten Anzahl an Spielsteinen, die entfernt werden müssen. Kann Spieler A, der beginnt, sicher gewinnen?

**Tabelle 1: Variationen der Aufgabe NIM-Spiel nach Schupp (2002, S. 92 ff.)**

Ein Ziel dieser Pilotstudie ist die Überprüfung, ob sich die für Problemlöseprozesse entwickelten Untersuchungsmethoden in Anlehnung an Rott (2014) auch für die Analyse von Problem-Posing-Prozessen eignen. Dabei beansprucht die kleine Stichprobe keine Repräsentativität und somit stellen die Ergebnisse keine Verallgemeinerung dar. Stattdessen dient dieser qualitative und empiriebasierte Einblick in den Prozess des Problem Posings der Hypothesengenerierung über ein bislang wenig betrachtetes Forschungsfeld.

## Ergebnisse

**Forschungsfrage 1:** Die erste Frage fokussiert die Identifikation von Episodentypen innerhalb der videographierten Problem-Posing-Prozesse mithilfe der beschriebenen Auswertungsmethode. Es wurden fünf Episodentypen herausgestellt, mit denen die erhobenen Prozesse zeitdeckend charakterisiert werden können. Tabelle 2 erfasst die wesentlichen inhaltlichen Aspekte dieser Episodentypen. Dieser kurzen inhaltlichen Beschreibung folgt eine genauere Betrachtung der einzelnen Episodentypen. Dabei werden terminologische und inhaltliche Zusammenhänge zwischen etablierten Problemlösmodellen gezogen und inhaltliche Präzisierungen herausgestellt. Außerdem wird auf diejenigen Episodentypen hingewiesen, die in der Forschung bislang unerwähnt geblieben sind.

Episodentyp	Beschreibung
Analyse	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Erfassung der Bedingungen des Initialproblems</li><li>▪ Analyse des Initialproblems im Hinblick auf Variations- und Generierungsmöglichkeiten</li></ul>
Variation	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Variation einzelner Bedingungen des Initialproblems</li><li>▪ Beibehaltung des Charakters der Aufgabe (Lösungsstruktur, Fragestellung etc.)</li></ul>
Generierung	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Generierung eines gänzlich anderen Problems mit neuen und zu konstruierenden Bedingungen und Fragestellungen</li><li>▪ Verwendung des <i>Problemgegenstandes</i> (Spielsteine beim NIM-Spiel) für die Generierung</li></ul>
Problemlösen	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Planen eines (mehr oder weniger) konkreten Weges zur Lösung des variierten oder generierten Problems</li><li>▪ Ausführung des Plans ist dabei nicht obligatorisch</li></ul>
Evaluation	<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Bewertung des aufgeworfenen Problems auf der Grundlage individueller Kriterien (ist es angemessen lösbar, sinnvoll, vollständig, unterscheidet es sich vom Initialproblem etc.)</li></ul>

**Tabelle 2: Episodentypen des strukturierten Problem Posings**

Der Begriff des Episodentyps *Analyse* wurde dem Problembearbeitungsprozess nach Schoenfeld (1985, S. 110 f.) entlehnt. Er versteht unter der *Analysis* die Tätigkeit, die Bedingungen des gegebenen Problems zu untersuchen, um herauszustellen, was gegeben und was gesucht ist. Damit gleicht diese Phase Pólyas erster Problemlösephase des *Verstehens der Aufgabe* (1949, S. 20). Da beim strukturierten Problem Posing das Initialproblem bereits gelöst und verstanden wurde, evaluieren Proband\*innen innerhalb der *Analyse* stattdessen mögliche Variations- und Generierungsmöglichkeiten durch Herausstellen der gegebenen Bedingungen des Problems. Diese Tätigkeit

entspricht dem ersten Schritt der bekannten Problem-Posing-Strategie „What-if-not“<sup>2</sup> von Brown und Walter (1983, S. 31 ff.), bei der im ersten Schritt auch die Bedingungen des Problems aufgelistet werden sollen.

Die *Variation* bildet – gemeinsam mit der *Generierung* – das Herzstück des Problem Posings. Nach Silvers dargestelltem Definitionsangebot von Problem Posing bezeichnet die *Variation* das Reformulieren eines gegebenen Problems (1994, S. 19). Bei der *Variation* werden – analog zu Schupps (2002) Aufgabenvariation – einzelne Bedingungen des Initialproblems gezielt verändert, ohne das Problemsetting, die Lösungsstruktur oder die Fragestellung zu verändern. In Schoenfelds Problemlösemodell (1985, S. 110 ff.) findet sich diese Tätigkeit in der *Exploration* wieder, in der modifizierte Probleme gesucht und bearbeitet werden, die bei der Lösung des Initialproblems helfen könnten. Die Tätigkeit der *Variation* wird außerdem in Pólyas *Rückschau* (1949, S. 28 f.) angesprochen, in der, um das Aufgabenverständnis zu verbessern, die Lösung des Initialproblems oder deren Methode für andere Aufgaben verwendet werden soll. Diese Parallele zwischen der *Variation* beim Problem Posing und der *Rückschau* beim Problemlösen zieht auch Silver, wenn er schreibt: „[T]he process of posing new problems by examining solutions to a given problem and generating related problems that might be solved in similar ways [...] is associated with the ‚Looking Back‘ phase of problem solving discussed by Pólya“ (1995, S. 69).

Auch die *Generierung* spiegelt sich in Silvers aufgeführtem Verständnis von Problem Posing im Generieren neuer Probleme (vgl. 1994, S. 19) wider. Die Abgrenzung dieses Episodentyps von der *Variation* basiert unter anderem auf der Eigenschaft, dass diejenigen Aspekte, die bei der *Variation* zum Verständnis des Initialproblems beitragen, für die *Generierung* nicht mehr gelten. Hier wird ein gänzlich neues Problem aufgestellt, für das – im Gegensatz zur *Variation* – neue Bedingungen konstruiert werden müssen. Nicht selten wird dabei das Interaktionsobjekt des Problems – im Falle des NIM-Spiels die 20 Spielsteine – beibehalten und um dieses herum neue Problemkontexte entworfen. Wenn die Proband\*innen beispielsweise ausschließlich die Spielsteine für die Entwicklung gänzlich neuer Probleme nutzen, betreiben Proband\*innen innerhalb der *Generierung*, je nach gewähltem Grad der Strukturiertheit, kein strukturiertes, sondern freies und semi-strukturiertes Problem Posing (Stoyanova & Ellerton, 1996).

In der Literatur sucht man vergeblich nach einer solchen prozessualen Unterscheidung zwischen *Variation* und *Generierung*. Die oben beschriebenen Differenzen zeigen aber, dass in den Episoden durchaus unterschiedliche

---

<sup>2</sup> Schupp (2002, S. 21) versteht die bereits vorgestellte Aufgabenvariation als Adaption und Erweiterung dieser „What-if-not“-Strategie.

kognitive Prozesse aktiv sind und somit eine Differenzierung begründet und notwendig ist.

Beim Episodentyp *Problemlösen* durchläuft der Problem Poser einen verkürzten Problemlöseprozess. Dabei werden vor allem die Phasen *Design* und *Implementation* (vgl. Schoenfeld, 1985, S. 110) bzw. *Ausdenken* und *Ausführen des Plans* (vgl. Pólya, 1949, S. 22 ff.) des Problemlösens fokussiert. Oft wird die Ausführung ausgespart, wenn der Plan bereits hinreichende Aussagen über die Lösbarkeit und Komplexität des aufgeworfenen Problems zulässt. Zudem kann es genügen, ein Gefühl über die Vollständigkeit und angemessene Lösbarkeit der Variation bzw. Generierung zu entwickeln.

Abschließend dient die *Evaluation* der Bewertung des aufgeworfenen Problems auf der Grundlage individueller Kriterien. In den beobachteten Prozessen wurde zumeist die sinnvolle Lösbarkeit, die Ähnlichkeit der Fragestellung oder der Lösungsstruktur zum Initialproblem, die Angemessenheit für eine bestimmte Zielgruppe sowie das Lösungsinteresse als Bewertungskategorie herangezogen. Auf der Grundlage dieser *Evaluation* wird das gestellte Problem anschließend als angemessen akzeptiert oder verworfen.

Die beschriebenen Episodentypen sind nicht völlig trennscharf voneinander und die Übergänge zwischen ihnen sind fließend. Besondere Schwierigkeiten bestehen bei der Unterscheidung zwischen den Episodentypen *Variation* und *Generierung*, bei der etwaige Zweifelsfälle beim Bestimmen der Episoden diskutiert werden müssen. Das Setzen der Episodengrenzen sowie die inhaltliche Bestimmung der Episodentypen wurden bei den beobachteten Prozessen bislang nur konsensuell validiert. Eine unabhängige Kodierung, in der die Interraterübereinstimmung überprüft wird, steht noch aus.

**Forschungsfrage 2:** Die zweite Forschungsfrage beschäftigt sich mit der Entwicklung eines deskriptiven Prozessmodells des strukturierten Problem Posings. Dazu wurden die beobachteten Prozesse im Hinblick auf Prozessmuster untersucht. Zentrale Muster werden im Folgenden beleuchtet.

Falls Proband\*innen eine *Analyse* vornehmen, so findet diese fast ausschließlich zu Beginn des Prozesses statt, bevor anschließend *variiert* wird. Konstatieren sie in einer späteren *Analyse*, dass ihre *Variationsideen* ausgeschöpft sind, folgt zumeist die *Generierung* weiterer Probleme. Ein weiteres Muster ist der zyklische Wechsel zwischen *Variation* bzw. *Generierung* und *Problemlösen*. Dieser Wechsel tritt zum einen dann auf, wenn Proband\*innen feststellen, dass ihr aufgestelltes Problem aufgrund individueller Kriterien modifiziert werden muss. Da nicht jedes aufgestellte Problem abschließend bewertet wird, tritt dieses Muster zudem auf, wenn die *Evaluation* ausgespart wird. Ebenso prägnant ist außerdem der Dreischritt aus *Variation*

bzw. *Generierung*, *Problemlösen* und *Evaluation*, der bei einem Großteil der Prozesse mehrfach beobachtet werden konnte. Nachdem ein Problem aufgeworfen wurde, beginnt ein neuer Prozess. Das Problem Posing kann daher als zyklischer Prozess aufgefasst werden.

Der Problem-Posing-Prozess von Mona zur Situation *NIM-Spiel* ist in Abbildung 1 in Anlehnung an die Prozessdarstellungen Schoenfelds (1985) visualisiert. Dieser Prozess bildet die oben beschriebenen zentralen Muster ab:

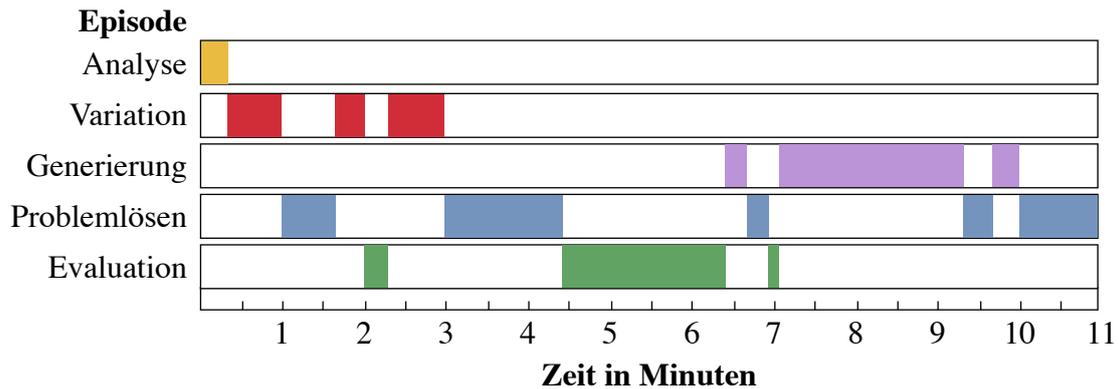


Abbildung 1: Problem-Posing-Prozess zur Situation *NIM-Spiel* der Probandin Mona

Die konstatierten Phasenübergänge wurden in dem folgenden, deskriptiven Prozessmodell des strukturierten Problem Posings (vgl. Abb. 2) zusammengefasst:

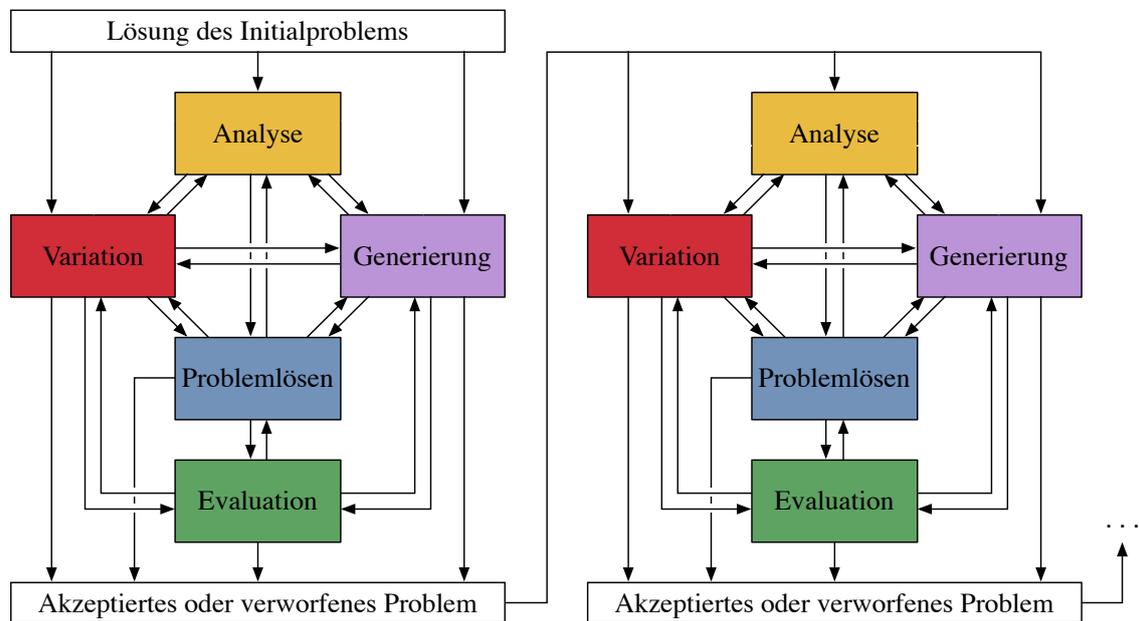


Abbildung 2: Deskriptives Prozessmodell des strukturierten Problem Posings

Wegen der kleinen Stichprobengröße wurden nicht alle eingezeichneten Phasenübergänge auch tatsächlich beobachtet, sondern aufgrund empirischer und theoretischer Überlegungen geschlussfolgert. Außerdem lässt die

wenig heterogene Stichprobe nur unsichere Aussagen über die Anwendbarkeit dieses Modells bei Prozessen anderer Proband\*innen und Problem-Posing-Situationen zu. Aus diesem Grund ist die Darstellung explizit als Hypothese zu verstehen, die versucht, sich einem aktuell in der Forschung noch nicht existenten deskriptiven Prozessmodell des Problem Posings zu nähern.

## **Diskussion**

Problem Posing ist ein Thema, das trotz der hohen Relevanz, die man ihm aus fachwissenschaftlicher sowie fachdidaktischer Perspektive zuschreibt, bisher nur eine geringe empirische Aufmerksamkeit zugestanden bekommt. Die Ergebnisse dieser Pilotstudie stellen daher vorsichtige Hypothesen dar. Die in der Literatur angenommene Nähe des Problem Posings zum Problemlösen eröffnet die Frage, ob überhaupt die Entwicklung eines eigenen Prozessmodells des Problem Posings notwendig ist oder ob nicht vorhandene Phasenmodelle des Problemlöseprozesses hierfür ausreichend sind. Es hat sich jedoch im Rahmen der vorliegenden, explorativen Untersuchung gezeigt, dass Teilprozesse und Kompetenzen, die beim Problem Posing aktiviert werden müssen, durchaus andere als beim Problemlösen sind. Dieser Einschätzung stimmen auch Pelcer und Gamboa zu: „[D]o we need a model for Problem Posing or, in fact, Problem Posing is ‚covered‘ by a problem solving model. We argue that there is a need for a separate model, since the sub-processes involved in the stages are different and the knowledge has to be applied in a distinct way“ (2009, S. 359).

Die Ergebnisse dieser empirischen Studie eröffnen Schwerpunkte weiterer Analysen zum Prozess des Problem Posings. Das Prozessmodell kann in zukünftigen Studien durch verschiedene unabhängige Coder und eine heterogene Stichprobe validiert werden. Zudem erscheint, in Anlehnung an Schoenfeld (1985), die Analyse prozessualer Unterschiede zwischen Expert\*innen und Noviz\*innen zielführend. Im Besonderen können weitere Prozessanalysen und Interviews mit Expert\*innen bei der Entwicklung eines *normativen* Prozessmodells dienlich sein, das – ebenso wie ein deskriptives Modell – bislang nicht postuliert wurde. Außerdem wird die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Problem Posing und Problemlösen in der Forschungsliteratur als hoch relevant eingeschätzt. Die Notwendigkeit dieser Grundlagenforschung zeigt zudem, in welchem frühen Stadium sich die Problem-Posing-Forschung befindet. Dieser Perspektive stimmen auch Cai et al. zu: „The journey of problem-posing research in mathematics has taken its first step, but many more steps need to follow“ (2015, S. 29).

## Literatur

- Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing*. Philadelphia: Franklin Institute Press.
- Cai, J. & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 401–421.
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. & Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In Singer, F. M., Ellerton, N. F. & Cai, J. (Hrsg.), *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (S. 3–34). New York: Springer.
- Dickman, B. (2014). Problem Posing with the Multiplication Table. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 5(1), 47–50.
- Einstein, A. & Infeld, L. (1995). *Die Evolution der Physik. Mit einer Einführung von Albrecht Fölsing* (Neuausgabe [141.–149. Tausend]). Wien: Rowohlt.
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems – a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261–271.
- Ellerton, N. F., Singer, F. M. & Cai, J. (2015). Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future. In Singer, F. M., Ellerton, N. F. & Cai, J. (Hrsg.), *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (S. 547–556). New York: Springer.
- English, L. D. (1997). The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 183–217.
- Hussy, W., Schreier, M. & Echterhof, G. (2013). *Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor* (2., überarbeitete Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern – ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 38(5), 300–306.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From? In Schoenfeld, A. H. (Hrsg.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (S. 123–147). Hillsdale, New Jersey und London: Lawrence Erlbaum Associates.
- Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In Mey, G. & Mruck, K. (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 476–490). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R. & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149–161.
- Leong, Y. H., Tay, E. G., Toh, T. L., Quek, K. S. & Dindyal, J. (2011). Reviving Pólya's "Look Back" in a Singapore school. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 181–193.
- Maher, C. A. & Sigley, R. (2014). Task-Based Interviews in Mathematics Education. In Lerman, S. (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 579–582). Dordrecht: Springer.

- Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Bern: Narr Francke Attempo.
- Pólya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University.
- Pehkonen, E. (2004). State-of-the-Art in Problem Solving: Focus on Open Problems. In Rehlich, H. & Zimmermann, B. (Hrsg.), *ProMath 2003 – Proceedings of an International Symposium in September 2003* (S. 55–65). Hildesheim und Berlin: Franzbecker.
- Pelczer, I. & Gamboa, F. (2009). Problem Posing: Comparison between experts and novices. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Hrsg.), *Proceedings of the 33<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4* (S. 353–360). Thessaloniki: PME.
- Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35(2), 251–282.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen. Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.
- Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Silver, E. A. (1995). The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 27(2), 67–72.
- Silver, E. A. & Cai, J. (1996). An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521–539.
- Singer, F. M., Ellerton, N. F. & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1–7.
- Stoyanova, E. & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In Clarkson, P. C. (Hrsg.), *Technology in mathematics education (Proceedings of the 19th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (S. 518–525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Van Harpen, X. & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: an analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 201–221.