Mathematik in der Grundschule.
Ist es nötig, besonders befähigte Kinder bereits im Grundschulalter noch / schon eigens zu fördern?

(Siegbert Schmidt,
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik, Universität zu Köln)
siegbert.schmidt@uni-koeln.de

Universität im Rathaus – 18. Juli 2005

(0) **Vorbemerkungen** – oder:
Fragen beantworten oder miteinander ins Gespräch kommen?

(0.1) Zur Vorankündigung zum Vortrag (im Internet)

Im wissenschaftlichen Diskurs ist das Aufwerfen von Fragen etwas durchaus Produktives und keinesfalls etwas ´Ehrenrühriges´– deshalb hatte ich keine Bedenken, derzeit der Pressestelle der Universität eine Liste von Fragen statt einer berichtenden Kurzfassung zukommen zu lassen. Meine Erfahrung führt mich zunehmend zu der Auffassung, dass jene Fragen, die – sei es für die Wissenschaft im engeren Sinne, sei es für die Gesellschaft – von substanzieller Relevanz sind, mit der überkommenen Matrix wissenschaftlicher Disziplinen kaum zureichend bearbeitet werden können – Interdisziplinarität und kommunikative Offenheit sind vielmehr gefragt. Insofern erscheint es mir für die Umgebung dieses Vortrages sehr geeignet, wenn ich darauf abhebe, dass wir miteinander ins Gespräch kommen; denn die Thematik ist ja keineswegs eine rein ´wissenschaftsinterne Fragestellung´, geht es letztlich doch um einen Aspekt der Entwicklung unserer Kinder.

Insofern werden konkrete – wenn man so will recht ´erdverbundene´ – Beispiele aus unserer Arbeit mit mathematisch besonders befähigten Grundschul-Kindern eine herausgehobene Rolle spielen – durchaus im Horizont jenes Diktums von I. Kant, dass Begriffe ohne Anschauungen leer seien und Anschauungen ohne Begriffe blind.

(0.2) Förderungen von Grundschul-Kindern im universitären Bereich

Schon seit einiger Zeit, mancherorts erst vergleichsweise kurz gibt es an mehreren Universitäts-Standorten Kolleginnen und Kollegen aus dem Bereich der Mathematikdidaktik, die mit Förder-Gruppen von mathematisch talentierten oder von mathematisch leistungsfähigeren oder von mathematisch besonders interessierten Grundschulkindern arbeiten:

- Frau **Nolte** in Hamburg;
- Herr **Käpnick** – bisher – in Braunschweig, jetzt in Münster;
- Herr **Bardy** in Halle;
- Frau **Grassmann** in Münster;
- Herr **Bauersfeld** in Bielefeld;
- Herr **Weiser** und ich in Köln;
- Herr **Winter** hat über eine gewisse Phase – sozusagen – eine ´Starthilfe´ für ein Projekt in Aachen gegeben;
- neuerlich hat auch Herr **Hasemann** in Hannover eine solche Förderung angeschoben.

Auf die Besonderheiten vor Ort soll hier nicht eingegangen werden, zumal dazu **im Sommer 2005 ein Buch** erscheinen wird, in dem die jeweils arbeitenden Kolleginnen und Kollegen selber darüber Auskunft geben werden; Ziel dieser Darstellung soll es sein, jenen, die mit mathematisch talentierten Grundschul-Kindern arbeiten wollen, Hilfen und Anregungen zu dieser Arbeit anzubieten – sowohl praktisch-organisatorische als auch inhaltlich-konzeptionelle.

Hinweis:
- *Aktivitäten auf schulischer Ebene;*
- *Internet-Angebote: z.B. Kaenguru - www.mathe-kaenguru.de;*
- *Mathematik-Wettbewerb Grundschule in NRW – www.learn-line.nrw.de/angebote/gswettbewerbmathe/* .

Allein die Tatsache, dass diese Aktivitäten eher im Anwachsen begriffen sind, ist ein Fingerzeig, dass man sich faktisch nicht damit beruhigen kann, dass sich die mathematisch talentierten Kinder eh im Schulbetrieb ´durchbeißen´ werden, so dass hier doch – im Unterschied zu jenen

Kindern, welche beachtliche Probleme beim Arithmetiklernen haben – eine eigene Förderung gar nicht angezeigt sei. Das dem nicht so ist, wird schon recht schnell deutlich, wenn sich herumspricht, dass es da ´irgendwo´ ein solches Förderprojekt gebe: Es kommen sofort Anfragen, und bei diesbezüglichen Gesprächen mit den Eltern zeigt sich alsbald, dass in den Familien mit mathematisch talentierten Kindern bereits im Grundschulalter gar nicht durchweg eitel Sonnenschein herrscht.

Hinweis (SENG): J.T. Webb – E.A. Meckstroth – S.S. Tolan:
Hochbegabte Kinder, ihre Eltern, ihre Lehrer.
Bern: Huber, 3. Aufl., 2002

Meine **persönliche Motivation**, mich sowohl um den Bereich der Grundschul-Kinder zu kümmern, die Lernschwierigkeiten beim Rechnenlernen haben, als auch um jene, die als mathematisch talentiert gelten können, besteht ganz schlicht in Folgendem:

- Im Bereich der Rechenschwäche kann man lernen, was alles beim Arithmetiklernen **missglücken** kann – ohne dass man dazu schon alles ´in den Büchern´ findet.
- Im Bereich der mathematisch talentierten Kinder kann man lernen, was an Beachtlichem – unter gewissen Umständen – **glücken** kann.

Und diese Beobachtungen und die entsprechenden Reflektionen helfen ganz tüchtig mit, jene **Einblicke in das elementare Mathematiklernen** so **zu vertiefen und zu differenzieren**, dass davon alles, was ich mathematikdidaktisch tue – insbesondere in der Lehrerinnenbildung – kräftig und hoffentlich auch nachhaltig profitiert. Und insofern sind unter den hic et nunc zu präsentierenden Fragekomplexen vorzüglich solche, die mich gegenwärtig selber intensiv interessieren.

Für Anfragen per E-Mail:

siegbert.schmidt@uni-koeln.de ;

mathe-kinder@uni-koeln.de .

(1) Wie sollte die Grundschule mit

- **mathematisch talentierten /**
- **mathematisch besonders leistungsfähigen /**
- **mathematisch (hoch) begabten**

Kindern umgehen?

Oder:

Wie sollten Persönlichkeitsentwicklung der Kinder und ihre spezifische Förderung zueinander in Beziehung gesetzt werden?

(1.1) Sind hoch begabte Kinder gegenüber ihren Altersgenoss-inn-en (peers) eher anders oder eher ähnlich?

„Hoch begabte Grundschulkinder sind ihren Peers ähnlicher, als man es aufgrund der in der Literatur immer wieder behaupteten ´Andersartigkeit´ Hochbegabter vermuten könnte: **Hoch begabte Grundschüler sind zuerst einmal und vor allem Kinder wie alle anderen Kinder auch**, mit ähnlichen Vorlieben, mit ähnlichen Abneigungen, mit ähnlichen Schwierigkeiten, mit ähnlichen Vorzügen“ (D. Rost (2000), S. 5; Hervorhebung durch den Zit.).
„**Hoch begabte Underachiever** scheinen nach unseren Befunden (Hanses & Rost (1998)) echte Problemkinder zu sein, für die in vielen Fällen eine pädagogisch-psychologische Beratung oder sogar Psychotherapie indiziert ist“ (D. Rost (2000), S. 5 f.; Hervorhebung durch den Zit.).

„Wenn man sich **hoch begabten Kinder**n verantwortungsbewusst zuwendet, so sollte man sich vor allem deren **grundsätzliche Andersartigkeit** vergegenwärtigen … Vielmehr fühlen, denken und handeln diese ungewöhnlichen Kinder deutlich anders, als im Lebens- und Schulalltag erwartet wird. Sie wirken daher oft eigensinnig, übersensibel, störend, ja konfus, wenn nicht idiotisch auf ihre Lehrerinnen und Lehrer. Manche lernen schon als Kinder, ihre besonderen Fähigkeiten zu verbergen, um nicht aufzufallen. Als Folge ihrer Fehleinschätzung und Fehlbehandlung verkümmern viele, allzu viele Hochbegabungen“
(H. Bauersfeld (2003), S. 67).

Welche Position beziehen Sie aufgrund Ihrer Erfahrungen und Ihrer grundlegenden pädagogischen Orientierung?

(1.2) Wie sollten Persönlichkeitsentwicklung der Kinder und fachlich spezifizierte Förderangebote zueinander stehen?

Man findet in der Literatur z.B. dieses bemerkt:

„Ihr **´Intelligenzalter´** [gemeint: Intelligenzalter von Hochbegabten; Einfügung durch den Zit.] ist sozusagen dem **Lebensalter** weit voraus, d.h. ihre Persönlichkeitsentwicklung ´hinkt´ nach“ (H. Bauersfeld (2003), S. 69; Hervorhebungen durch den Zit.).

Zudem zeichnet sich auch diese Empfehlung ab – nicht zuletzt auch mit Bezug auf aktuellere neurobiologische Forschungsergebnisse:

„In der Bildung gilt: Je früher, desto besser“ – so etwa W. Singer (1999).

Man spricht inzwischen auch in diesem Horizont von „kritischen Phasen“ und entsprechend von günstigen „Zeitfenstern“ für die – kognitive – Entwicklung und damit auch für etwaige Förderungen.

Angesichts dessen, was im Abschnitt (2) noch zu explizieren sein wird, haben wir es hier mit folgender grundsätzlichen Sperrigkeit zu tun:

- **Einerseits** werden wir aufgerufen, uns **frühzeitig** – im Sinne sensibler Phasen – um die **Förderung besonders talentierter Kinder**n zu kümmern.
- **Anderseits** ist die **Stabilität** in den jeweiligen Ausprägungen **von besonderen Talenten** im Grundschulalter **keineswegs** durchgehend **zureichend stabil.**

Genügt es,

- **herausfordernde elementar-mathematische Problemstellungen zu präsentieren und von den Kindern bearbeiten zu lassen und**
- **ihre emotionalen wie sozialen Befindlichkeiten und Probleme einem bereichsunspezifischen – pädagogischen – erzieherischen Tun bzw. entsprechenden Expertinnen zu überantworten?**

Wenn sich Persönlichkeit – auch oder gar nur – **in der Auseinandersetzung mit Personen und Inhalten („Sachen") entwickelt und man – a fortiori – für eine – enge – Verbindung von inhaltlich-spezifischen (Förder-)Angeboten plädiert –, was kann das für mathematische Förderangebote bedeuten?**

Zusatz:

In der Diskussion um Förderungen von besonders begabten Kindern wird i.d.R. folgende kategoriale Einteilung unterlegt:

- enrichment (anreichernde Zusatz-Förderung),
- acceleration (beschleunigter Fortschritt),
- grouping (Bilden von leistungs- bzw. begabungshomogenen Gruppen).

Wenn im Folgenden von Förderangeboten gesprochen wird, dann zielt stets auf die enrichment-Variante – sei sie schulisch oder außerschulisch organisiert. Freilich soll dies stets auch im Horizont möglicher ´Ausstrahlungen´ auf den regulären mathematischen Unterricht in der Grundschule gesehen werden.

(1.3) Soll man Mädchen und Jungen – in diesem Alter – bei Förderungen im (elementar-)mathematischen Bereich trennen?

Es fällt bei bisherigen Förderprojekten zur Mathematik im Grundschulbereich auf, dass der Anteil der Mädchen im Vergleich zu den Jungen deutlich geringer ist: 20 % - 25 % Vorschläge von Lehrerinnen oder Meldungen unter Einbeziehung der Eltern sind vermutlich keine Seltenheit.

Mädchen, auch entsprechend talentierten Mädchen wird zugeschrieben, dass sie „eher misserfolgsängstlich" seien und daher nicht so sehr in Erscheinung treten, wie dies bei den Jungen vorherrschend der Fall ist. Insofern ist damit zu rechnen, dass Mädchen stärker in der Gefahr sind, zu „Underachievern" zu werden – womöglich besonders in der Mathematik.

Soll man sich also zu dieser Forderung verstehen?

„Als eine wichtige Forderung sollte die – jedenfalls anfängliche – Trennung der Förderangebote für Mädchen und Jungen angesehen werden"
(H. Bauersfeld (2003), S. 80).

Wie sehen Ihre Erfahrungen hierzu aus, und
welche Konsequenzen ziehen Sie im Hinblick auf entsprechende Förderangebote (im Grundschulbereich)?

3. Wie kann man jene Grundschulkinder finden, die
- mathematisch talentiert /
- mathematisch besonders leistungsfähig /
- mathematisch (hoch) begabt sind?

Das Erkennen von Hochbegabungen – insbesondere im frühen Alter – ist schwierig:

- La Paro & Pianta (2000) ziehen in einer Meta-Analyse von 70 Logitudinalstudien gerade im Hinblick auf die frühe Schulzeit dieses Fazit:

  „Instability or change may be the rule rather than the exception“ (S. 476).

- Bei Lehrer-inne-n ist die Neigung zu beobachten, „die Hochbegabung schwieriger Schüler zu unterschätzen“ (D. Rost (2000), S. 25).

  In einer empirischen Untersuchung kamen D.Rost & P. Hanes (1997) bei Grundschullehrer-inne-n im Hinblick auf Grundschulkinder des 3. Schuljahres zu folgenden Ergebnissen:

- Bei den **Maßstäben „gehört zu den 4 % intelligentesten Schüler-inne-n“** bzw. „gehört zu den 8 % intelligentesten Schüler-inne-n“ wurden **von Lehrkräften 41%** bzw. 57% als hochbegabte Achiever zutreffend eingeordnet.

  (Als Hochbegabte galten die Kinder mit einem IQ zwischen 126 und 156.)

  Im Hinblick auf die **hochbegabten Underachiever** wurde beim **4%-Maßstab kein Kind zutreffend eingeordnet**, beim 8%-Maßstab weniger als 10%; und selbst beim 24%-Maßstab wurden noch rund 70% der hochbegabten Underachiever übersehen.

  (Als Underachiever galten jene Hochbegabten, deren Zensuren-Durchschnitt in Deutsch, Mathematik und Sachkunde nicht besser war als bei 136 durchschnittlich Vergleichs-Schüler-inne-n (IQ zwischen 85 und 114, im Mittel bei 102). Es gab 17 hochbegabte Underachiever: 9 Jungen, 8 Mädchen.)

Diese Ergebnisse verweisen auf folgende von der Gesellschaft zu beantwortende Frage:

Was soll als gravierender erachtet werden?

- **Es werden nicht alle – hoch – begabten Kinder bzw. Schüler gefunden** (β–Fehler).
- **Es werden Kinder bzw. Schüler als – hoch – begabt eingestuft, die es nicht sind** (α–Fehler).

(In einer Studie mit Lehrern und Schülern des Gymnasiums (Kl. 10 – 12) und Nominierungen für die Deutsche Schülerakademie konnte H. Neber (2004) dieses aufzeigen:

- Von 151 von den Lehrern nominierten Schülern waren nur 24 hoch begabt (CAT; PR = 97) – immerhin waren dies alle in der Stichprobe hoch begabten Schüler.
- Die Selbsteinschätzungen der Schüler waren im Hinblick auf das benutzte psychometrische Kriterium deutlich schlechter als die Einschätzungen der Lehrer.
- Bei den Lehrern wie bei den Schülern spielten für die Einschätzungen Motivationsfaktoren eine substanzielle Rolle.)

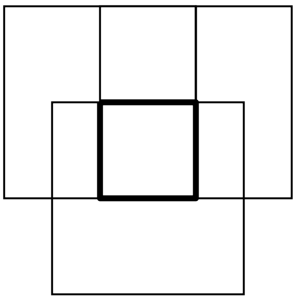
Grundsätzlich kann die Frage aufgeworfen werden, ob eine solche **´Linearisierung´ sowie Fokussierung auf den g-Faktor –** und damit eine vergleichsweise bereichsunabhängige Einschätzung des intellektuellen Potenzials –, wie sie in dem Bezug auf einen IQ bzw. einen entsprechenden Prozentrang zum Ausdruck kommt, ein geeignetes Maß für die Auswahl von (Grundschul-)Kindern für eine spezifische Förderung in Mathematik ist. D. Rost argumentiert entschieden für eine solche Position.

Nota bene: Die Frage, wer ´eigentlich´ dafür zuständig ist zu entscheiden, welche Kinder als (hoch) begabt gelten – Vertreterinnen bzw. Vertreter aus der (Schul-)Psychologie oder solche aus jenen Sektoren, in denen eine Förderung stattfinden soll, also für den Bereich der Mathematik auch Vertreterinnen oder Vertreter aus der Mathematikdidaktik –, ist keineswegs eine rein akademische Frage, sondern durchaus eine von gesellschaftspolitischer Relevanz!

Es gibt bisher keine allseits akzeptierte qualitativ-inhaltliche Beschreibung dessen, was als Hochbegabung anzusehen ist. Quantitativ-statistische Abgrenzungen beruhen auf standardisierten Intelligenztests und arbeiten mit einer Prävalenz eines IQ $\geq$ 130 (mindestens zwei Standardabweichungen vom Durchschnitt nach oben) oder äquivalent dazu mit einem Prozentrang $\geq$ 98 .

Zudem: Die innerhalb der psychologischen Literatur vorgestellten Modellierungen zur Hochbegabung werden dort durchaus kontrovers diskutiert; so werden z.B. auch die beiden häufig zitierten Vorschläge von **Renzulli und Mönks** von D. Rost entschieden kritisiert.

Intelligenz **Aufgaben=verpflichtung**

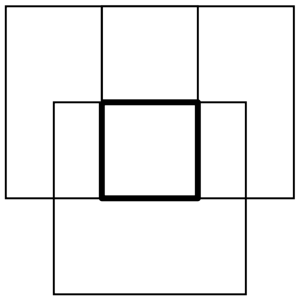


Kreativität

Hochbegabung sensu Renzulli

Familie Peers

Intelligenz **Kreativität**



Aufgabenzuwendung

Schule

Hochbegabung sensu Mönks

Merkmalslisten werden als zu „breit“ und zu „unscharf“ kritisiert.

Begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitsmerkmale
(Quellen: F. Käpnick (1998, 2001); W. Wieczerkowski (1998); B. Feger - T.M. Prado (1998); S. Schulte zu Berge (2001))

- **hohe geistige Aktivität**;
- **intellektuelle Neugier**;
- **Freude am Problemlösen**;
- **Anstrengungsbereitschaft**;
- **Infragestellen von Antworten oder Vorgehensweisen**;
- **Auffinden von Querverbindungen zwischen verschiedenen Themenbereichen**;
- **Konzentrationsfähigkeit**;
- **Beharrlichkeit**;
- **Selbstständigkeit;**
- **Kooperationsfähigkeit**;
- **gutes Gedächtnis**;
- **Originalität**;
- **hohe Sensibilität**;
- **Gefühl des Andersseins**;
- **Selbstbewusstsein**;
- **starkes Bedürfnis nach Übereinstimmung von Sollen und Tun;**
- **Sinn für Humor oder auch für Ironie**.

Mathematikspezifische Begabungsmerkmale (Quelle: F. Käpnick (1998, 2001))

(M.1) Verfügt das Kind über eine besondere Fähigkeit zum **Strukturieren mathematischer Sachverhalte**?

(M.2) Verfügt das Kind über eine besondere Fähigkeit zum selbstständig realisierten **Transfer bereits erkannter Strukturen**?

(M.3) Verfügt das Kind über eine besondere Fähigkeit zum **Speichern** - visuell oder akustisch präsentierter - **mathematischer Sachverhalte** im Kurzzeitgedächtnis - auch unter Nutzung erkannter mathematischer Strukturen?

(M.4) Verfügt das Kind über eine besondere Fähigkeit im selbstständig realisierten **Wechseln der Repräsentationsebenen**?

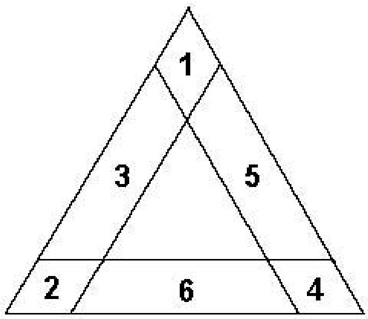
(M.5) Verfügt das Kind über eine besondere Fähigkeit im selbstständig realisierten **Umkehren von Gedankengängen** beim Bearbeiten mathematikhaltiger Problem-Situationen?

(M.6) Verfügt das Kind über eine besondere **mathematische Sensibilität**?

(M.7) Verfügt das Kind über **mathematische Fantasie**?

Illustration des Merkmals **Strukturieren mathematischer Sachverhalte** nach F. Käpnick (2001):

In diesem Dreieck kann man Besonderheiten in der Anordnung der Zahlen entdecken.
Welche Besonderheiten erkennst du in der Anordnung der Zahlen? - Gibt für drei erkannte Besonderheiten Zahlenbeispiele an und beschreibe die Besonderheiten jeweils in einem Satz.



Wie sind wir in unserem Projekt „Kinder und Mathematik in der Universität“ – 2002-2003 und dann 2004-2005 – bei der Auswahl vorgegangen?

- Schriftliche Information an die Grundschulen (in Köln) zu diesem Projekt für Kinder des 3. Schuljahres (mit Fortsetzung im 4. Schuljahr);
- (mehrere) Informations- und Arbeitstreffen mit interessierten Lehrerinnen und Lehrern;
- (mehrere) Förder-Treffen mit den von den Lehrerinnen vorgeschlagenen Kindern (als ´Schnuppertreffen´);
- Bearbeiten von (elementar-)mathematischen Indikator-Aufgaben (4 Aufgaben mit jeweils einer halbstündigen Bearbeitungszeit) sowie – soweit geldliche Mittel vorhanden – an einem anderen Termin Bearbeitung von Intelligenztests;
- Auswahl der Kinder, die für die weiteren Förder-Treffen eingeladen wurden –, wobei der Grad der Bearbeitung der Indikator-Aufgaben zunächst ausschlaggebend war, hilfsweise wurden die Ergebnisse aus den Intelligenztests herangezogen – zudem wurde eine ´Mädchen-Quote´ praktiziert.

Statistisch hat sich auf diese Weise 2004 – 2005 dieses Bild ergeben:

Teilnehmer-innen und Anmeldungen

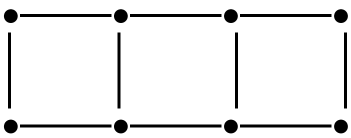
- ► Frühjahr 2004: schriftliche Information an alle 150 GS in Köln
- ► Vorbereitungstreffen: 2. 6. 2004, 2. 7. 2004, 6. 10. 2004
  Lehrerinnen aus 33 GS in Köln (+ 1 L.´ aus Frechen) ;
  Eltern-Informations-Abend: 14. 10. 2004
- ► Vorschläge aus den Schulen: 12. 10. 2004
  22 GS in Köln - 61 Schülerinnen und Schüler
- ► ´Schnuppertreffen´: 6. 11. 2004 – 15. 12. 2004
  4 Gruppen (A.1, A.2, B.1, B.2) mit je zwei Treffen
  (2 + 2) Abmeldungen → 57 Kinder
- ► Bearbeitung von Indikator-Aufgaben: 18. 12. 2004
  4 Gruppen mit insgesamt 50 Kindern

Teilnahme an der Bearbeitung der Indikator-Aufgaben				**Anmeldungen (durch die Schulen)**		
12	(♀: 3	♂: 9)	(A.1)	15	(♀: 3	♂: 12)
9	(♀: 0	♂: 9)	(A.2)	15	(♀: 3	♂: 12)
13	(♀: 3	♂: 10)	(B.1)	15	(♀: 4	♂: 11)
16	(♀: 4	♂: 12)	(B.2)	16	(♀: 4	♂: 12)
50	(♀: 10	♂: 40)	Gesamtheit	61	(♀: 14	♂: 47)
	(20%)	(80%)			(23%)	(77%)

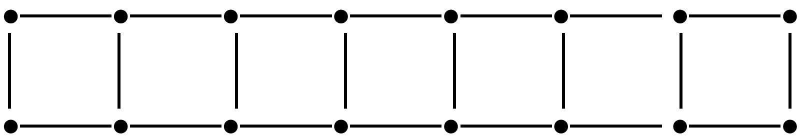
Eingeladene Kinder: 21 (♀ : 5 ; ♂ : 16) ; **Schulen: 15**

Angesichts einer Absprache mit meiner Kollegin Frau Prof. Nolte (Universität Hamburg) können hier nicht die original benutzten Indikator-Aufgaben präsentiert werden; deshalb sei zur Illustration eine (Ersatz-)Aufgabe mit ´Indikator-Eigenschaft´ skizziert:

Aus gleich langen Stäben und Knetkugeln werden Gitterfiguren folgender Art gebaut:



Länge 3



Länge 7

Fülle die Tabelle vollständig aus!

Länge	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**	**10**	**…**	**30**
Stäbe			**10**				**22**				
Knetkugeln			**8**				**16**				

Schreibe bitte auf, wie du bei der Länge 30 gerechnet hast!

Zusatz (für die interessierte Leserin / den interessierten Leser): Überlegen Sie, warum folgende Aussage **nicht** zutreffend ist: Für eine Gitterfigur der Länge 30 braucht man dreimal so viele Knetkugeln und Stäbe wie für eine Gitterfigur der Länge 10.

Zur Heterogenität der Gesamtheit der Kinder (bzgl. Indikator-Aufgaben)

Rechenpunkte – maximal erreichbar:		Musterpunkte – Möglichkeiten dazu, Anzahl nach oben offen
12 [= 6 + 6]	Aufgabe (1)	16 [= 8 + 8]
6	Aufgabe (2)	3
6	Aufgabe (3)	12
20	Aufgabe (4)	6

An Rechenpunkten waren maximal 44 erreichbar;
Möglichkeiten zu Musterpunkten (gegenwärtig): 38

Ergebnisse bei den Rechenpunkten:		**Ergebnisse bei den Musterpunkten:**	
		0 - 0,5 :	8
1 - 5,5 :	4	1 - 1,5 :	8
6 - 11,5 :	12	2 - 2,5 :	9
12 - 20,5 :	24	3 - 4,5 :	13
≥ 21 :	10	≥ 5 :	12

Faktisch erreichte Höchstzahlen: 38 : 1 36 : 1

Faktisch erreichte Höchstzahlen: 7,5 : 2 7 : 1

Kombinationen bei den Gesamtergebnissen: (Rechenpunkte / Musterpunkte)

Als schwache Ergebnisse können diese gelten:

♂ : (1 / 0); (1,5 / 0); (4 / 0) . ♀ : keine

Als gute oder gar sehr gute Ergebnisse können diese gelten:

♂ : (38 / 5); (35 / 5); (24,5 / 7,5); (19 / 7); (19 / 6,5)

♀ : (36 / 5); (16 / 7)

Aber auch solche Ergebnisse hat es gegeben:

♂ : (12 / 0); (9 / 0); (7 / 0); (18 / 1); (15 / 1); (20,5 / 1);
(26 / 2); (25 / 2); (4,5 / 3,5); (2 / 2); (10 / 3)

Zusatz:

Im weiteren Verlauf des Schuljahres 2004-2005 arbeiten wir in der Universität mit zwei Gruppen von Kindern (11, 10); zudem existiert – aufgrund besonderer Umstände – noch eine weitere Gruppe von Kindern in Köln-Weiden, diese wird von zwei Mitarbeiterinnen betreut, die als Tutorinnen auch in den beiden besagten ´Hauptgruppen´ mitarbeiten; nach den Sommerferien 2005 werden diese Kinder in die beiden Hauptgruppen integriert werden.

Wie interpretieren Sie ein solches Bild?

Welche angemessenen wie praktikablen Möglichkeiten der Talentsuche – ´in Sachen Mathematik´ – erscheinen Ihnen – bis auf weiteres – angeraten?

(3) Was ist Mathematik (auch im Horizont der Grundschule)? – Oder: Welche (elementar-)mathematischen Problemstellungen sollte man für die Förderung von Grundschulkindern auswählen, die
- **mathematisch talentiert /**
- mathematisch besonders leistungsfähig / mathematisch (hoch) begabt

sind?

Folgende Fokussierungen von H. Freudenthal werden als zentral betrachtet:

„Mathematik ist keine Menge von Wissen,
Mathematik ist eine Tätigkeit,
eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung.“ (1982)

„Und doch ist es **Mathematik,** wie ich sie auffasse.
Mehr als das: eine **mathematische Haltung,**
selber herauszufinden, wie man es macht.“ (1981)

Die Frage „Was ist Mathematik?“ kann seriös nicht ein für allemal beantwortet werden: “Die Definition der Mathematik wechselt. Jede Generation und jeder scharfsinnige Mathematiker innerhalb einer Generation formuliert eine Definition, die seinen Fähigkeiten und Einsichten entspricht.“ (P.J. Davis – R. Hersh (1994), S. 4)

Im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 1868* sind 12 Hauptabteilungen mit 38 Unterabteilungen aufgeführt; etwa 100 Jahre später 1979 umfassten die *Mathematical Reviews* der AMS 61 Hauptabteilungen mit ca. 3400 Unterabteilungen.

Man benötigt dennoch insgesamt – wie eben auch für Förder-Vorhaben für mathematisch talentierte Grundschul-Kinder – ein „gut begründetes stufenübergreifendes Leitbild“ von Mathematik für den Mathematikunterricht – wenigstens auf Zeit; und als ein solches fokussiert E.C. Wittmann (2003) ja dieses: **Mathematik** ist die **Wissenschaft von den Mustern**. Und in der Tat kann man dies durchaus als ein „Leitmotiv von den ersten Aktivitäten des Kleinkindes bis hin zu den aktuellen Forschungen des mathematischen Spezialisten“ (E.C. Wittmann (2003), S. 26) auffassen. Und K. Kießwetter wird nicht müde, uns auch für eine solche Förderarbeit im Grundschulbereich daran zu erinnern, dass bei aller elementarmathematischen Einbettung Verwurzelungen erfolgen sollen, welche in der Fortsetzung zu mathematischer Theoriebildung führen können.

Die Vereinbarkeit dieser Akzentuierungen mit jenen von H. Freudenthal ist voll gegeben und muss hier nicht diskutiert werden, zumal ja bei H. Freudenthal das **Mathematisieren** sowohl als **horizontales** als auch als **vertikales Mathematisieren** das Mathematiktreiben ausmacht.

Angesichts dessen dürfte man beim Fördern von mathematisch talentierten Grundschul-Kindern **nicht bei ´schönen Aufgaben-Inseln´ verbleiben** – wiewohl diese ja auch schon einen bei den Kindern willkommenen Kontrast zur Schulalltäglichkeit abgeben; vielmehr müsste man sich entschieden darum bemühen, solche **Problemsituationen** zu finden, welche **mathematisch fortsetzbar** sind – bis hin zu einer Theoriebildung jenseits der Primarstufe und womöglich auch jenseits der Sekundarstufe I. Insofern ist damit die Frage relevant, inwiefern eine ´schöne Lösungsidee´ fortsetzbar im Sinne einer generalisierenden Verwendung ist.

Folgende beiden Leitlinien sind daher für das Projekt „Kinder und Mathematik in der Universität“ maßgebend:

- **Anthropologische Leitlinie:**

  Lernende sind – von Anfang an – als **individuelle Subjekte**
  und nicht als Objekte lehreringesteuerter Lernprozesse anzuerkennen.

- **Leitlinie von der Mathematik als Tätigkeit,**
  als Prozess des Aufdeckens bzw. Konstruierens von Mustern:

  „**Mathematik** ist **keine Menge von Wissen**,
  Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise,
  eine Geistesverfassung". (H. Freudenthal (1982)).

Beide Leitlinien kann man auch als zwei Seiten einer Medaille ansehen, wie dies aus einem weiteren Zitat von H. Freudenthal (1982) erhellt:

> „Mathematik ist eine Geistesverfassung,
> die man sich handelnd erwirbt,
> und vor allem die Haltung, keiner Autorität zu glauben,
> sondern vor allem immer wieder ´warum´ zu fragen:
> *Warum ist 3 · 4 dasselbe wie 4 · 3 ?*
> *Warum multipliziert man mit 100, indem man zwei Nullen anhängt?*
> …
> Immer gilt:
> Der Schüler erwirbt Mathematik als Geistesverfassung
> nur über Vertrauen auf seine eigenen Erfahrungen
> und seinen eigenen Verstand.
>
> Viele Schüler haben im Mathematikunterricht erfahren,
> dass sie mit ihrem Verstand nichts anfangen können,
> dass es am rechten Verstand fehlt,
> dass der Lehrer und das Buch doch alles besser können,
> als sie es sich selber ausdenken können.
> …
> Eine **Geisteshaltung** erwirbt man aber nicht,
> indem einer einem schnell erzählt, wie er sich zu benehmen hat.
> **Man lernt sie durch Tätigsein, indem man Probleme löst,**
> allein oder in seiner Gruppe – **Probleme, in denen Mathematik steckt**."
> (H. Freudenthal (1982))

Können Sie, werte Hörerin / Leserin bzw. werter Hörer / Leser die beiden warum-Fragen im Zitat beantworten – einmal auf einem ´Erwachsenen-Niveau´, zum anderen auf einem ´Grundschüler-innen-Niveau´?

Illustrationen aus einer Problemsequenz der gegenwärtigen Förder-Arbeit: Rechendreiecke und Rechenvierecke und was man mathematisch daraus (in der Primarstufe) machen kann ! (SI-Fortsetzbarkeiten werden hier nicht diskutiert.)

Zur Information: Man soll innere Zahlen (aus $\mathbb{N}_0$) so finden, dass die Summe zweier benachbarter Zahlen gleich der jeweiligen äußeren Zahl ist. – Wie bei den Rechendreiecken hatten die Kinder gefunden und begründet: Wenn es solche inneren Zahlen gibt, dann ist die Summe der äußeren Zahlen gerade. – Folgende 3 ½ Seiten wurden den Kindern vorgelegt.

„Kinder und Mathematik in der Universität“

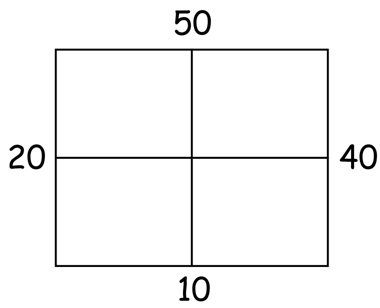
(2004 – 2006)

Rechendreiecke und Rechenvierecke – von außen nach innen betrachtet, und was man dabei erforschen kann

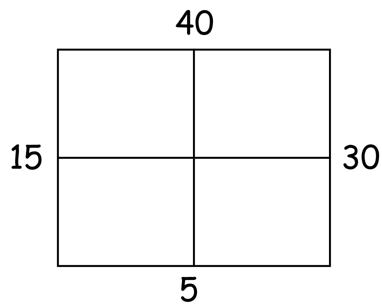
Problem 2: [Nachbetrachtung zum F-Treffen vom 8. Juni 2005 – 22. Juni 2005]

Wie sieht es aus, wenn wir statt der Rechendreiecke nun Rechenvierecke betrachten?

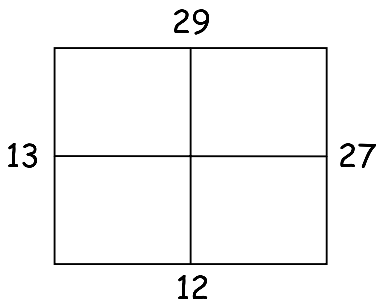
- **Was ´geht´ hier ähnlich?**
- **Was ist hier – etwas – anders?**



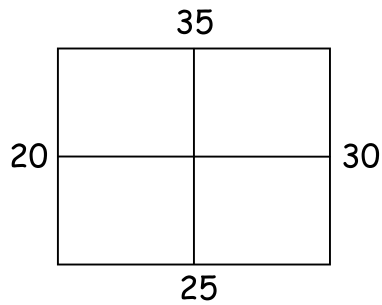
(1)



(2)



(3)



(4)

► Zu den **Rechenvierecken (1) und (2)** haben wir **Lösungen** gefunden.

Ja mehr noch: Wir haben hier für jedes Rechenviereck **sogar mehrere Lösungen** gefunden.

Wie viele Lösungen gibt es bei (1) und wie viele bei (2)?

► Bei den Rechenvierecken (3) und (4) hat sich diese **Vermutung** ergeben:

Hier gibt es **keine Lösung**.

Für das Rechenviereck (3) hat uns Hanna eine sehr schöne Begründung vorgetragen.

Für die Vermutung zum Rechenviereck (4) müssen wir uns noch eine Begründung überlegen.

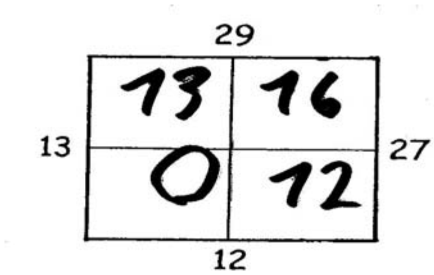
Hier ist die schöne **Begründung**, die uns **Hanna** beim **Rechenviereck (3)** gegeben hat:

(H.0) Gerade plus gerade ist gerade; ungerade plus ungerade ist gerade;
gerade plus ungerade ist ungerade; ungerade plus gerade ist auch ungerade.

(H.1) *Im linken unteren Feld trägt Hanna eine „0“ ein und sagt:*

Dies ist eine gerade Zahl.

(H.2) **Dann muss im rechten unteren Feld eine gerade Zahl stehen, weil die untere äußere Zahl ja gerade ist.**
Hanna trägt rechts unten eine „12“ ein.



(H.3) **Oben links muss eine ungerade Zahl stehen, weil die linke äußere Zahl ungerade ist.**

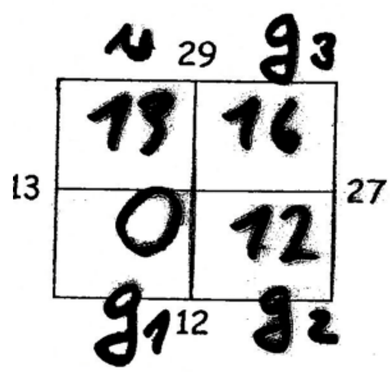
Sie trägt oben links eine „13“ ein.

(H.4) **Oben rechts muss dann eine gerade Zahl stehen, weil die obere äußere Zahl ungerade ist.**

Hanna trägt rechts oben eine „16“ ein.

(H.5) **Dann müsste sich für die rechte äußere Zahl eine gerade Zahl ergeben, diese ist aber ungerade.**

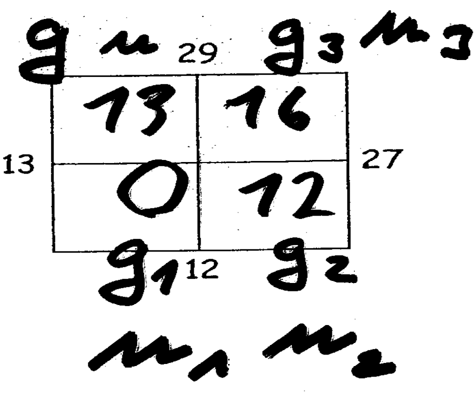
Wir haben dann – gemeinsam – diese von Hanna mündlich vorgetragene Begründung überblickt und mit „g“ für „gerade Zahl“ und „u“ für „ungerade Zahl“ als Abkürzungen etwas dazu geschrieben – das sah dann so aus:



Und dann haben wir uns noch gefragt:

Was passiert, wenn wir links unten mit einer ungeraden Zahl starten?
Da meinten einige sofort: „Dann dreht sich alles um“. Was war damit gemeint?

Unsere Folie sah dann so aus:



Kommentar– oder:

Warum Hannas Begründung schon richtige Mathematik ist:

► Wenn man etwas Logik kann, so lässt sich eine Begründung auch anders – recht schnell – finden:

Wir hatten nämlich schon herausgefunden und begründet:

Wenn es passende innere Zahlen gibt,
dann ist die Summe der äußeren Zahlen gerade.

Kenner der Logik wissen dann:

Wenn die Summe der äußeren Zahlen ungerade ist,
dann gibt es keine passenden inneren Zahlen.

(Da wir aber noch nicht genügend solche Erfahrungen haben, konnten wir diesen Weg noch nicht gehen.)

► Das Schöne an der Begründung von Hanna ist dieses:

Sie hat zwar bestimmte Zahlen eingetragen, aber sie hat bei diesen Zahlen nur darauf geschaut, ob sie gerade oder ungerade sind.

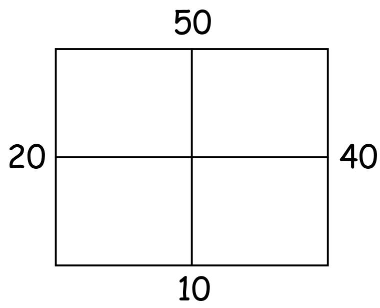
Und deshalb kann man ihre **Begründung** leicht auf alle anderen Beispiele übertragen – und zwar auf **alle Beispiele, bei denen die Summe der äußeren Zahlen ungerade ist.**

Wie steht es aber um das Rechendreieck (4)?

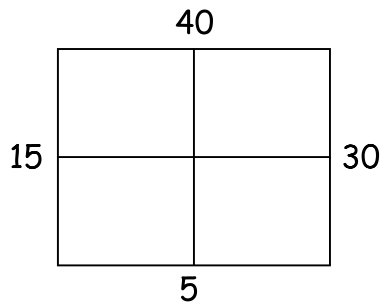
Die Summe der äußeren Zahlen ist gerade – so wie das bei den Rechenvierecken (1) und (2) auch ist.

Und trotzdem haben wir die Vermutung, dass es bei (4) – im Unterschied zu (1) und (2) – keine passenden inneren Zahlen geben kann.

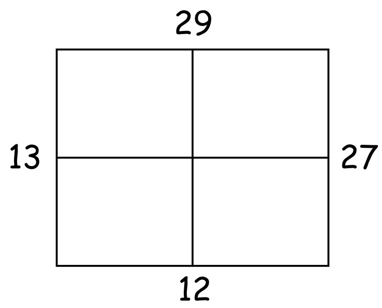
Wenn das richtig ist, dann muss es noch etwas geben, was die Rechenvierecke (1) und (2) von dem Rechenviereck (4) unterscheidet.



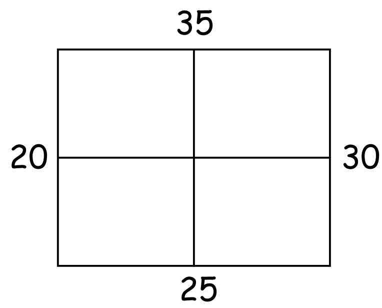
(1)



(2)



(3)



(4)

Im Original folgten hier noch weitere leere Rechenvierecke „zum Probieren und Studieren“.

Folgende – verkleinerte – Faksimiles zweier kooperierender Mädchen zeigen zweierlei:

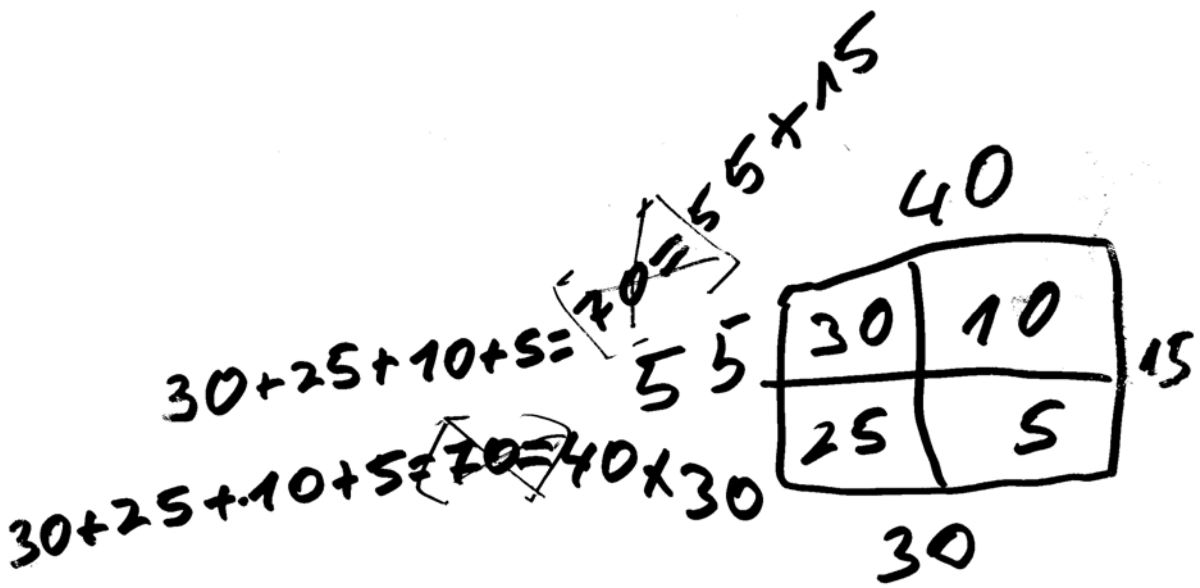
- ´Reichweite´ in den Ideen der Kinder:

  Sie haben eine notwendige Bedingung der Lösbarkeit gefunden; da im Rechenviereck (4) – wie übrigens auch rückschauend im Rechenviereck (3) – diese Bedingung verletzt ist, kann es dort keine Lösungen geben.

- ´Arithmetische Präponderanz´, die noch immer wieder durchbricht:

  Die beispielbezogene Begründung für die gefundene Eigenschaft ´transzendiert´ ihre Beispielbezogenheit gerade dadurch, dass man die Summen nicht ausrechnet, sondern strukturell aufeinander bezieht, während es die Kinder aufgrund ihrer unterrichtlich-schulischen Erfahrungen gewohnt sind, diese auszurechen. (Die eckigen Einklammerungen der Zahl 70 sind Ergebnis entsprechender Betrachtungen zu den Darlegungen und schriftlichen Fixierungen der beiden Mädchen im Plenum.)

  Unsere Beobachtungen zeigen jedoch, dass der Übergang von der Perspektive einer ´nummerischen Arithmetik´ zu einer entwickelteren ´algebraischen Arithmetik´ durchaus in Reichweite der Kinder liegt.



Notation von Lilly (Gleichungen links) und Sara (Rechenviereck rechts)

* alle inneren Zahlen addierd
= ~~x~~ 2 gegenüberliegende
äußere Zahlen addiert.

Notation von Sara

K. Kießwetter hat innerhalb seiner Förderarbeit mit mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern aus den Sekundarstufen – innerhalb des „Hamburger Modells" während der letzten etwa 25 Jahre – folgende „Kategorien mathematischer Denkleistungen" expliziert, welche sehr produktive – und zudem zu den oben gegebenen Formulierungen kompatible – Herausforderungen auch für unsere Arbeit abgeben können und sollen – bei der Konstruktion der Aufgaben-Sequenzen für die Kinder ebenso wie bei unseren Abstützungen zu dem eigen-produktiven Arbeiten der Kinder.

- **Organisieren von Material; (*)**
- **Sehen von Mustern und Gesetzen; (*)**
- **Erkennen von Problemen, Finden von Anschlussproblemen;**
- **Wechseln der Repräsentationsebene (vorhandene Muster / Gesetze in „neuen" Bereichen erkennen und verwenden); (*)**
- **Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten;**
- **Prozesse umkehren.**

Wir fokussieren derzeit bei unserer Arbeit die durch „(*)" markierten Kategorien.

Und wie die oben dokumentierten Beispiele zeigen, liegen diese Kategorien durchaus in der Reichweite der Kinder, wobei folgende Fokussierungen für die Gestaltung der Fördertreffen mit den Kindern ihre Relevanz gewinnen:

- das **eigentätige Bearbeiten von Problem-Situationen** durch die teilnehmenden Kinder – in selbst gewählten Arbeits- wie Sozialformen;
- das **Präsentieren gefundener Lösungen** für die anderen;
- das **Kommunizieren über das Arbeiten** an den Problem-Situationen;
- ein **Praktizieren von wie zunehmendes Reflektieren auf Heuristiken**;
- ein **Auseinandersetzen mit verschiedenen Darstellungsformen von mathematisch-strukturell Gleichartigem**.

(4) Welche Formen des – insbesondere verschriftlichten – Darstellens von Lösungen und welche Begründungen erscheinen akzeptabel oder erstrebenswert?

(4.1) Mündlichkeit und Schriftlichkeit beim Darstellen von Lösungen und Begründungen durch die Kinder

Es fällt auf, dass auch mathematisch talentierte (Grundschul-)Kinder gar nicht so selten die Neigung haben, ihre Lösungen im Modus der Mündlichkeit anzubieten – ja gar die Schriftlichkeit oder andere Darstellungsformen wie z.B. eigene Tabellierungen oder Diagramme von sich weisen: **„Ich bin nicht hier, um zu schreiben; ich bin hier, um zu rechnen."**

Hier wirkt die unterrichtliche Sozialisation sehr stark, gemäß der die Schriftlichkeit als sprachlich-textliches Formulieren – insbesondere als freies Formulieren – dem Bereich der Sprache zugewiesen wird, während es im mathematischen Unterricht nurmehr um nicht-umgangssprachliche Darstellungen geht; und wenn hier sprachlich-textliche Formulierungen angezeigt sind, dann sind sie auf der Basis unterrichtlicher Absprache standardisiert. Dass man die eigenen Überlegungen zur Lösung wie insbesondere auch zur Begründung eines Problems – einer Aufgabestellung – schriftlich mitteilbar machen sollte – durchaus unter Einbeziehung von Tabellierungen und Diagrammen –, das ist – bis auf Ausnahmen – nicht geläufig.

Wie viel – nicht-standardisierte – Schriftlichkeit – einschließlich selbst gewählter Tabellierungen, Diagramme o.ä. – als ´legitimer Teil´ von Bearbeitungen (elementar-)mathematischer Probleme sollte man erwarten?

Exemplifizierungen aus einer Problem-Situation:
Wie viele Primzahlen können zwischen zwei aufeinander folgenden Zehnerzahlen immer nur höchstens liegen?
(Diese Problemstellung stammt aus der Förderarbeit von P. Bardy (Universität Halle-Wittenberg.)

Schriftliche Formulierungen von drei Jungen aus der ersten Staffel (2002-2004):

Jan (9):

„Es gehen nur ungerade Zahlen, weil man die geraden Zahlen durch 2 teilen kann.
Es gehen nicht die Zahlen, die am Ende der Zahl eine 5 stehen haben,
weil sie durch 5 teilbar sind.
Also ist da nur noch übrig von der E 1,3,7,9. Jetzt kommt nur noch die 3.
Die nehmen an der E manchmal 2 Zahlen „weg", manchmal auch keine."

Klaus (9):

„Es gehen nur ungerade Zahlen, das sind immer zwischen 2 10er-Zahlen 5.
Aber die 5er Zahlen kann man durch 5 teilen, deswegen gibt es nur 4."

Peter (10):

„5 Primzahlen zwischen zwei Zehnerzahlen gibt es nicht, denn zwischen zwei Zehnerzahlen gibt es mindestens eine ungerade Zahl, die man durch drei teilen kann."

Also war jetzt die Frage zu klären: Warum gibt es zwischen zwei – aufeinander folgenden – Zehnerzahlen stets eine durch 3 teilbare ungerade Zahl?

Der Nachbar von Peter, nämlich Klaus – er hatte ja selber eine andere Argumentation vorgetragen – extemporierte nun mündlich diese Argumentation:

K.: Zwischen zwei Zehnerzahlen gibt es zwei Zahlen, die man durch 3 teilen kann.

Zwischenruf eines Mädchens: Es gibt immer drei solche Zahlen.

K.: *[auf den Zwischenruf reagierend]*
Dann sage ich: Zwischen zwei Zehnerzahlen gibt es <u>mindestens</u> zwei Zahlen, die man durch 3 teilen kann.

Ist diese Zahl ungerade, dann kann sie selber keine Primzahl sein.

Ist diese Zahl gerade, dann ist die nächste Zahl, die durch 3 geteilt werden kann, ungerade und keine Primzahl.

Eventuell muss man auch die nächste kleinere Zahl nehmen, die durch 3 geteilt werden kann. Man muss ja im selben Zehner bleiben.

(4.2) Welche Darstellungs-Werkzeuge / –Routinen sollten mathematisch talentierten Grundschul-Kindern zugänglich gemacht werden?

Es gibt ja Routinen innerhalb der Mathematik, welche Grundschulkindern nicht geläufig sind, zu denen die Menschheit aber auch recht lange gebraucht hat, um sie sich verfügbar zu machen. Hierzu gehört auch der Gebrauch von Variablen.

Welche Möglichkeiten könnte es geben, um in Förderungen – im Horizont von „enrichment“ – den Kindern einen Gebrauch von Variablen zu ermöglichen, ohne bereits den im Mathematikunterricht der gymnasialen Mittelstufe behandelten Kalkül von Term- und Gleichungsumformungen zu entfalten? Solche Umformungen – auch das Konstatieren von Äquivalenzen – sollten auf dieser Ebene auf strukturierten (elementar-)mathematisch-inhaltlichen Erfahrungen und Überlegungen beruhen.

An einigen Beispielen aus der Arbeit mit den Kindern aus unserem Projekt „Kinder und Mathematik in der Universität“ wollen wir einen Einblick in die hier angesprochene Thematik vermitteln – stets verbunden mit der Anregung an Sie – werte Hörerin / werte Leserin oder werter Hörer / werter Leser –, sich auch selber – bei aller Elementarität – auf die jeweiligen Problemfragen einzulassen:

- Rechenaufgaben vor dem Rechnen als Hilfe zum Aufdecken bzw. Konstruieren von Mustern;
- Tabellierungen und wie sie helfen können, Zusammenhänge – mit Bezug auf die Folge der natürlichen Zahlen – zu klären;
- Gebrauch von Variablen und einfachen Termen zum günstigeren Erfassen arithmetischer Muster;
- Diagramme – hier: Baum-Diagramme – als Hilfen, eine – drohende – ´Unübersichtlichkeit´ übersichtlich zu machen; *[hier nicht ausgeführt]*
- so eine ´einfache´ arithmetische Situation: *[hier nicht ausgeführt]*
  $1 + 2 + 3 + \ldots 97 + 98 + 99 + 100 = \square$
  und eine recht beachtliche Vielfalt von Deutungen und Vorgehensweisen – wie bekommt man deren strukturelle Gleichartigkeit ins Bewusstsein?

Datum: 06.04.05

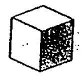
„Kinder und Mathematik in der Universität"
(2004 – 2006)

Würfel-Bauwerke – räumliches Vorstellen und Zahlen

- Seite 1 a –

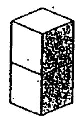
Zur Einführung:

Dieses soll ein Bild eines Würfels sein:



Du weißt sicherlich, wie viele Ecken, Kanten, quadratische Flächen ein Würfel hat, nicht wahr?

- Stell dir vor, ein Würfel liegt auf einem Tisch.
  - Wie viele quadratische Flächen sind sichtbar?
  - Wie viele quadratische Flächen sind verdeckt?
- Hier sind nun zwei – gleich große – Würfel zu einem Turm aufeinander gestellt:
  - Wie viele quadratische Flächen sind nun sichtbar?
  - Wie viele quadratische Flächen sind nun verdeckt?



Problem 1:

(1.1) Man kann natürlich auch 3, 4, 5 oder noch mehr – gleich große – Würfel zu einem Turm aufeinander stellen.

- **Wie viele quadratische Flächen sind jeweils sichtbar?**
- **Wie viele quadratische Flächen sind jeweils verdeckt?**

Hier ist eine Tabelle, in welche du deine Ergebnisse eintragen kannst:

Anzahl der Würfel	Anzahl der **sichtbaren** Quadrate	Anzahl der **verdeckten** Quadrate
1	5	1
2	9	3
3	13	5
4	17	7
5	21	9
10	41	19
100	401	199
1000	4001	1999

Versuche, eine Regelmäßigkeit zu finden, so dass du bei einem Würfel-Turm aus 100 oder sogar 1000 Würfeln sagen kannst, wie viele Quadrate sichtbar und wie viele verdeckt sind.

Versuche auch, diese Regelmäßigkeit irgendwie schriftlich zu notieren!

Auf der Rückseite geht es weiter!

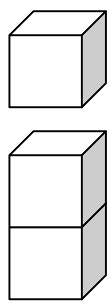
Nach Aufforderung, die Rechenaufgaben zu notieren, die jeweils zu den – richtigen –Zahlen in obiger Tabelle geführt haben, fertigte dieses Mädchen folgende Zusammenstellung an:

1	1·4+1	1·2 −1
2	2·4+1	2·2 −1
3	3·4+1	3·2−1
4	4·4+1	4·2−1
5	5·4+1	5·2−1
10	10·4+1	10
100	100·4+1	100
1000	1000·4+1	1000
	Ich habe wie viele Würfel es sind mal 4 gerechnet weil man 4 Flächen an einem Würfel sind und oben drauf also +1	Ich habe wieviele Würfel es sind ·2

Verschieden aussehende Regeln – und trotzdem alle richtig!
Oder:
Man kann – bei demselben Problem – unterschiedlich denken.

Problem (1.1):

s: **Anzahl der sichtbaren quadratischen Flächen**
v: **Anzahl der verdeckten quadratischen Flächen**
w: **Anzahl der Würfel (oder auch: Höhe des Würfel-Turmes)**



Wie könnte jemand – beim Finden der Regel – gedacht haben?

$\mathbf{s = (w-1) \cdot 4 + 5}$ $\qquad$ $\mathbf{v = (w-1) \cdot 2 + 5}$

$\mathbf{s = 4 \cdot w + 1}$ $\qquad$ $\mathbf{v = 2 \cdot w - 1}$

$\mathbf{s = 6 \cdot w - 2 \cdot w + 1}$

$\mathbf{s = 6 \cdot w - 1 - (w-1) \cdot 2}$

(5) Wie steht es um ein produktives ´Zusammenspiel´ zwischen (Kognitions-)Psychologie und Mathematikdidaktik?

Die Fachgruppe der Schulpsychologen im Verband der Psychologen reklamiert für sich, dass die Schulpsychologen *die Expertinnen bzw. Experten* seien, denen es zukomme, darüber zu befinden, welche Kinder hoch begabt seien oder nicht. Dies zeigt, dass die Titelfrage dieses Abschnitts keineswegs nur eine akademisch-epistemologische Frage ist, sondern eine durchaus ´politische Dimension´ hat, die hier aber nicht diskutiert werden soll.

Betrachtet man Übersichts-Artikel aus dem Umfeld des Max-Planck-Instituts für Psychologie in München zur Thematik kognitionspsychologischer Theorien von Begabung – so etwa F.E. Weinert – M.R. Waldmann (1985) oder M.R. Waldmann (1996) – oder auch einen Plenarvortrag von E. Lehtinen (Finnland) über „Mathematics education und learning sciences" auf dem „International Congress on Mathematical Education - 10" im Juli 2004 in Kopenhagen, dann zeichnet sich folgendes einerseits ernüchternde, aber in fachdidaktischer Perspektive durchaus auch hoffnungsvolle Bild ab:

- **Einfach fassbare wie tragfähige Theorien** zur Erklärung oder als Basis für praktisches Handeln im Bereich kognitiver Hochleistungen oder Hochbegabung **gibt es nicht** – und es ist mit ihnen auch nicht zu rechnen.
- Auch sind **bereichsunabhängige valide kognitive Prädiktoren für kognitive Hochleistungen oder Hochbegabung nicht zu erwarten** – jedenfalls sind die bisher vorliegenden Untersuchungen und Analysen dazu wenig ermutigend.
- In den Ansätzen zur Erforschung kognitiver Prozesse erscheinen Modelle, „die in Anlehnung an die Computeranalogie **eine biologische Hardware (kognitive Architektur) unabhängig von der Software (Wissenschaftsinhalte)** konzeptualisieren" geradezu als **„verfehlt"** (M.R. Waldmann (1996), S. 457).

Als wichtige **Konsequenz** zeichnet sich mithin ab: **Inhaltsspezifische Anbindungen an elementar-mathematische Problem-Situationen** sollten wir – bezogen auf solche bereichsunabhängigen Leit-Vorstellungen wie die der „kognitiven Architektur" – **nicht als ´Störfaktoren´ betrachten**; vielmehr gehören sie zentral zum Feld der Förderung mathematisch talentierter Kinder bzw. sind **durchaus zentral für das Erbringen intellektueller Leistungen** durch die Kinder: Es handelt sich intellektuelle Leistungen in einem inhaltlich spezifischen Bereich.

Insofern sollte eine beiderseitig offene Zusammenarbeit zwischen Kognitionspsychologie wie Mathematik-Didaktik angezeigt sein. In praxi bedeutet das auch, dass Ergebnisse von Intelligenztests allein nicht ausschlaggebend bei der Talentsuche sein können. Man findet alle ´Kombinationen´, die man sich vorstellen kann, schließlich auch ganz konkret durch Kinder repräsentiert – z.B. auch diese aus der ersten Staffel 2002 – 2004 des Projekts „Kinder und Mathematik in der Universität":

- Kinder mit IQ-Werten von 130 oder höher, von denen die einen hervorragend mitarbeiten, während bei den anderen sich nichts Bemerkenswertes zeigt.
- Kinder mit IQ-Werten, die lediglich im oberen Bereich des Durchschnitts liegen, die aber durch besonders originäre Ideen bei den elementar-mathematischen Problemstellungen auffallen.

Welche Erfahrungen haben Sie im ´Zusammenspiel´ zwischen Schulpsychologinnen und Ihnen als Vertreterinnen für den mathematischen Unterricht (in der Grundschule) bzw. Ihnen als Eltern von Kindern?

Wo erscheinen Ihnen Ergebnisse und Befunde aus der Kognitionspsychologie hilfreich – sei es bei der Talentsuche, sei es bei der Konzeptionalisierung von Förderungen?

(6) Sind (Grundschul-)Lehrerinnen im mathematischen Unterricht Modelle produktiven Arbeitens an (elementar-)mathematischen Problemen? Oder: Was sollte in der Lehrerinnenbildung diesbezüglich geschehen?

1995 - 1996 hat es in NRW eine Arbeitsgruppe „LPO Mathematik Primarstufe“ gegeben – bestehend aus Vertretern der Mathematikdidaktik an den Universitäten ebenso wie aus Kolleginnen der zweiten Phase und der Schulaufsicht. Aufgabe dieser Arbeitsgruppe war es insbesondere, die fachmathematische Ausbildung von Lehrerinnen für den mathematischen Unterricht in der Primarstufe so zu beschreiben, dass eine bessere Passung zwischen fachmathematischen sowie fachdidaktischen Anteilen im Studium erreicht werden sollte. – Damals gab es in NRW noch ein eigenständiges LA für die Primarstufe; zwischenzeitlich ist es ersetzt worden durch das GHRG-LA, wobei man sich freilich für den Schwerpunkt Grundschule entscheiden kann, ohne einen Rechtsanspruch zu haben, später auch in der Grundschule beschäftigt zu werden.

In einer der Fassungen unserer damaligen Arbeitstexte hieß es u.a. im Hinblick auf die „fachinhaltliche Ausbildung“ angehender Lehrerinnen für den mathematischen Unterricht in der Grundschule,

- dass dabei zwar „keine umfassende Systematik und kein durchgängiger Formalismus anzustreben“ sei, aber
- „in einem angemessenen Umfang … Lernsituationen bereitzustellen“ seien, „die gemäß den allgemeinen Prinzipien des Grundschul-Mathematikunterrichts konzipiert“ seien „und damit Gelegenheit
    - **zu eigenem problemlösenden, schöpferischen Tun**,
    - zum Erkennen und Herstellen **von Bezügen zwischen Mathematik und Welt,**
    - zum Sprechen über und **Argumentieren** mit Mathematik und
    - zum Aufbau einer **positiven Einstellung zur Mathematik** geben.“

Diese Grundauffassung über das Mathematiktreiben während des Studiums – verbunden mit dem Plädoyer, die Lehrveranstaltungen fachmathematischer und fachdidaktischer Art durchaus getrennt zu halten – hat die Arbeit dieser Arbeitsgruppe durchgängig bestimmt, auch wenn sich manche Formulierungen im Verlaufe der Arbeit änderten. [→ Kurzfassungen der Arbeitsergebnisse dieser Arbeitsgruppe sind erschienen in: P. Bardy (Hrsg.): Mathematische und mathematikdidaktische Ausbildung von Grundschul-Lehrerinnen / -Lehrern. Weinheim: Beltz 1997, S.208 – 224 und später auch im Journal für Mathematik-Didaktik. – Ansonsten ist das Ergebnis dieser Arbeit in einer Schublade des Ministeriums in Düsseldorf verschwunden.]

Übrigens ist uns damals sehr eindrücklich deutlich geworden, dass bereichsunspezifische Schlüsselqualifikationen keine mathematisch-bereichsspezifischen Qualifikationen generieren können – erstere können freilich eine – durchaus hilfreiche – ´regulative Rolle´ spielen.

Wenn freilich Lehrerinnen wie Lehrer für den mathematischen Unterricht in der Grundschule keine eigenen – zudem auch reflektierte – Erfahrungen im Umgang mit elementar-mathematischen Problem-Situationen haben, dann dürfte es schwierig sein, insbesondere mathematisch talentierte Kinder zu fördern. Der gute Wille allein genügt nicht! – Dass dies freilich auch ein gleichermaßen relevantes Problem für die Lehrerbildung in den Sekundarbereichen ist, macht sehr schön die Arbeit des BLK-Versuches Sinus bzw. dessen Fortsetzung Sinus Transfer deutlich.

Dazu eine kleine aktuelle Episode: Eine Lehrerin, die immerhin im Mai 2004 einige ihrer Kinder zur landesweiten dritten Runde des Grundschulwettbewerbs Mathematik in NRW zum Standort

Köln begleitet hatte, fragte jetzt bei anderer Gelegenheit im Oktober 2004 im Hinblick auf eine Aufgabe aus den Vergleichsarbeiten zur Mathematik für Klassen des 4. Schuljahres im September 2004 dieses:

Aufgabe:

Gegeben: 8 ____ 18 ____ 28 ____ 38

Zu ergänzen waren passende Zahlen in den Lücken.

Einige ihrer Schüler-innen hatten für alle drei Lücken „10“ angeben. Zwar enthielten ihre Lösungshinweise durchaus mehrere Lösungen, aber diese sei nicht dabei. Nun wisse sie nicht, wie sie diese Antwort werten solle.

Die Mathematikdidaktik in Deutschland muss sich im Hinblick auf die letzten etwa 30 Jahre schon die Vorhaltung machen lassen, keine wirklich spezifischen Lehrbücher zur fachmathematischen Ausbildung von Lehrerinnen – insbesondere auch von Grundschul-Lehrerinnen – vorgelegt zu haben, bei denen man die prinzipiellen Orientierungen für ein produktives Mathematiklernen auch selber für die eigene Lehrbuch-Gestaltung Ernst genommen hat. Zu sehr hat man sich letztlich eben doch an jenen Traditionen orientiert, wie sie von Mathematikern der Mathematischen Institute – mit durchaus anderen Ambitionen – gepflegt wurden und weitgehend immer noch werden! Ein Anfang ist nun freilich mit dem Erscheinen des Buches **„Arithmetik als Prozess“** – hrsg. von G.N. Müller – H. Steinbring – E.C. Wittmann (erschienen in der Kallmeyerschen Verlagsbuchhandlung 2004) gemacht worden, welches – den Start für eine Lehrbuch-Reihe unter dem Rubrum „Mathematik als Prozess“ abgeben soll.

Als Fazit zeichnet sich ab: Wenn von Seiten der Mathematikdidaktik das Fördern von mathematisch talentierten Grundschul-Kindern bejaht und begleitet werden soll, dann zeichnet sich auch ganz klar ab, dass man entsprechend passende Angebote – in Ausbildung wie Fortbildung – auch zur (Elementar-)Mathematik als Tätigkeit machen muss. Dass dies angeraten ist, haben auch die Informations- und Arbeitstreffen mit den interessierten Lehrerinnen 2004 bei der Vorbereitung der zweiten Staffel 2004 – 2006 zum Projekt „Kinder und Mathematik in der Universität“ unübersehbar gezeigt. Wir setzen zudem auch darauf, durch regelmäßig sich treffende Gesprächskreise den Austausch zwischen Schule und Universität ebenso zu befördern wie den zwischen den verschiedenen Schulen.

Als zwei – einander kontrastierende – Herausforderungen auch und gerade für die hier anstehende Thematik insgesamt möchte ich zwei – der drei Motto-Zitate – aus der Einleitung von „Arithmetik als Prozess“ an den Schluss setzen:

**„In einem bestimmten Sinn kann man sich die Mathematik
nur selbst beibringen,
und jemanden unterrichten kann nur heißen,
günstige Bedingungen dafür zu schaffen,
dass der andere sich selbst unterrichten kann“** (A. Revuz (1980)).

**„In der Mathematik gibt es nur richtig oder falsch.
Wir machen alles richtig!“**
(Dekan eines FB Mathematik 1996 als Antwort auf die Frage,
wie der FB die Lehre verbessern könnte)

Literaturhinweise

Bauersfeld, H. (2003): Hochbegabungen. Bemerkungen zu Diagnose und Förderung in der Grundschule.
In: M. Baum – H. Wielpütz (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule. Seelze: Kallmeyer , 67-90

Feger, B. – Prado, T.M. (1998): Hochbegabung. Die normalste Sache der Welt. Darmstadt: WB

Fischer, C. – Mönks, F.J. – Grindel, E. (Hrsg.) (2004): Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung. Begabungen fördern, Lernen individualisieren. Münster: LIT-Verlag

Freudenthal, H. (1981): Kinder und Mathematik.
In: Die Grundschule, 4, 100-102

Freudenthal, H. (1982): Mathematik – eine Geisteshaltung.
In: Die Grundschule, 4, 140-142

Hanses, P. – Rost, D.H. – (1998): Das „Drama“ der hochbegabten Underachiever. „Gewöhnliche“ oder „außergewöhnliche“ Underachiever?
In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 12, 53-71

Heller, K.A. (Hrsg.) (2000): Begabungsdiagnostik in der Schul- und Erziehungsberatung.
Bern: Verlag Hans Huber, 2. Auflage

Heller, K.A. (Hrsg.) (2001): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter.
Göttingen: Hogrefe, 2. Auflage

Käpnick, F. (1998): Mathematisch begabte Kinder. Frankfurt / Main: Peter Lang 1998

Käpnick, F. (2001): Mathe für kleine Asse. (Kl. 3/4).
Berlin: Volk und Wissen

Kießwetter, K. – Nolte, M (1996).: Können und sollen mathematisch besonders befähigte Schüler schon in der Grundschule identifiziert und gefördert werden?
In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28, 143-157

La Paro, K.M. – Pianta, R.C. (2000): Predicting children´s competence in the early school years: A meta-analytic review.
In: Reviews of Educational Research, 70, No. 4, Winter, 443-484

Mönks, F.J. (1990): Hochbegabtenförderung als Aufgabe der Pädagogischen Psychologie.
In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, 37, 243-250

Mönks, F.J. (1996): Hochbegabung. Ein Mehrfaktorenmodell.
In: Grundschule, 5, 15-16

Müller, G.N. – Steinbring, H. – Wittmann, E.C. (Hrsg.) (2004): Arithmetik als Prozess.
Seelze: Kallmeyer

Neber, H. (2004): Teacher identification of students for gifted programs: Nomination to a summer school for highly gifted programs.
In: Psychology Science (Psychologische Beiträge),46, issue 3, 348-362

Renzulli, J.S. (1978): What makes giftedness? Re-examining a definition.
In: Phi Delta Kappan, 60 (1978), 180-184 (man s.a. in: Diessner, R. – Simmons, S. (Eds.): Notable selections in educational psychology. Guilford: Dushkin – McGraw-Hill (2000), 373-384

Renzulli, J.S. (1993): Ein praktisches System zur Identifizierung hochbegabter und talentierter Schüler. In: Psychologie in Erziehung und Unterricht, 40, 217-224

Rost, D.H. (Hrsg.) (1993): Lebensumweltanalyse hochbegabter Kinder. Göttingen: Hogrefe

Rost, D.H. (Hrsg.) (2000): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Münster: Waxmann

Roth, H. (Hrsg.)(1968/1970): Begabung und Lernen. Stuttgart: Ernst Klett Verlag, 5. Auflage

Singer, W. (1999): „In der Bildung gilt: Je früher, desto besser."
In: Psychologie heute, Dezember 1999, 60-65

Waldmann, M.R. (1996): Kognitionspsychologische Theorien von Begabung und Expertise.
In: F.E. Weinert (Hrsg.): Psychologie des Lernens und der Instruktion. Göttingen: Hogrefe, 445-476

Weinert, F.E. – Waldmann, M.R. (1985): Das Denken Hochbegabter – Intellektuelle Fähigkeiten und kognitive Prozesse.
In: Zeitschrift für Pädagogik, 31, 789-840

Webb, J.T. – E.A. Meckstroth – S.S. Tolan (2002): Hochbegabte Kinder, ihre Eltern, ihre Lehrer.
Bern: Verlag Hans Huber, 3. Auflage 2002